

L'ALGÈBRE DE CLIFFORD ET SES APPLICATIONS

Gaston Casanova

SURVEY ARTICLE



Advances in Applied Clifford Algebras

Volume 12

May 2002

(S)

EDITORIAL NOTE

Several generations of students and scientists in the field of theoretical physics have enjoyed the lecture of Dr. Gaston Casanova's book "L'Algèbre Vectorielle", Paris: Presses Universitaires de France (1976). In this book we have found not only a didactic and interesting presentation of multivector algebra and analysis but mainly a useful methodological approach to present basic ideas of physics using these techniques. Dr. Casanova became interested in a new exposure where many of his ideas developed in the last 26 years are also included.

The new monograph includes an analysis of several applications to physics, which are complementary to those presented in his 1976 volume.

The presentation has been made in such a form that, in practice, this material can be extracted as a book by itself. Following the suggestions and desires of Dr. Casanova, a version, in English language, will be presented in a future number, where other topics in geometric analysis and applications to physics will be included by invitation.

Jaime Keller
Editor
Advances in Applied Clifford Algebras
May, 2002.

Contents

1	GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE	3
1.1	Introduction	3
2	L'ALGÈBRE DE CLIFFORD	5
2.1	Dimension de L'Espace de Clifford Associé à E_n	6
3	COURBURE ET TORSION DANS $R(n, 0)$	9
4	PRODUIT DE TROIS VECTEURS	13
5	FORMULES GÉNÉRALES	15
6	CARRÉ D'UN n-VECTEUR DANS UN E_n	17
6.1	Calcul de $(A_n)^2$	17
6.2	Notations et Commutativité	19
6.2.1	Définition. Vecteurs Liés	20

7	INVERSION ET PRODUITS D'INVERSIONS	23
7.1	Symétrie par Rapport à un Plan.	23
7.1.1	Inversion	24
7.1.2	Produit de Deux Inversions	25
8	PRODUIT DE TROIS INVERSIONS	29
8.1	Produit de Trois Inversions de Centres Coplanaires	34
8.1.1	Interprétation Géométrique	37
9	PRODUIT DE QUATRE INVERSIONS DE CENTRES NON COPLANAIRES	41
9.1	Equation aux Points Invariants	41
9.2	Discussion	44
9.2.1	Remarque	47
10	INVERSION HYPERBOLIQUE PLANE	49
10.1	Inverse d'une Hyperbole Équilatère	52
10.2	Produit de Deux Inversions Hyperboliques	54
10.3	Famille de Courbes Isogonales	58
10.4	Quadrilatère Inscrit Dans Une Hyperbole Équilatère	61
10.4.1	Quaternion Réels	63
11	INVERSE D'UN NOMBRE DE CLIFFORD	67
12	RACINES HYPERBOLIQUES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ET POINTS VIRTUELS	71
12.1	Produit de Bivecteurs.	76
13	FONCTIONS ANALYTIQUES HYPERBOLIQUES	81
14	FONCTIONS ANALYTIQUES PARABOLIQUES	87
15	L'ESPACE DE MINKOWSKI	91
II	QUELQUES APPLICATIONS A LA PHYSIQUE	93
16	FONCTION D'ONDE	95

17 DÉCOMPOSITION CANONIQUE DES ROTATIONS.	97
18 OPÉRATEURS.	101
19 EQUATION DE HESTENES	105
20 RÔLE DE L'ANGLE β.	111
21 LONGUEUR D'ONDE DE DE BROGLIE	119
22 SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE HESTENES.	123
23 MILIEU SUBQUANTIQUE	133
23.1 Potentiel de Yukawa	134
24 NON LOCALISATION DES ÉLECTRONS LIBRES	137
25 THEORIE RELATIVISTE DU NUCLEON ET DU DOUBLET Ξ	143
References	155

Part I

ALGÈBRE DE CLIFFORD

2 L'ALGÈBRE DE CLIFFORD ET SES APPLICATIONS

.

1

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1.1 Introduction

Calculer sur les concepts de la géométrie ou de la physique selon les règles d'une algèbre a été depuis longtemps la but des recherches de nombreux mathématiciens comme Leibnitz qui en rêva ou Carnot qui s'y essaya.

Après l'Irlandais Hamilton qui créa les quaternions, l'Allemand Grassmann et l'Américain Gibbs, ce fut l'Anglais Clifford qui accomplit le pas décisif il y a plus d'un siècle en abandonnant toute la commutativité pour les vecteurs mais en conservant leur associativité. Pour cela il définit une base canonique à l'aide d'une forme quadratique réduite $R(p, q)$ où p est le nombre de carrés précédés du signe plus (+) et q le nombre de carrés précédés du signe moins (-). L'ensemble des nombres de Clifford ou sommes de produits de vecteurs sera désigné par $CL(p, q)$.

Cette algèbre [1-6] absorbe les quaternions d'Hamilton, les quaternions complexes de P. Girard, le produit en croix et les nombres complexes et donc aussi les fonctions analytiques complexes, mais elle absorbe également

les nombres hyperboliques $x + \varepsilon y$ (x, y réels, $\varepsilon \in Cl(q, p)$ et $\varepsilon^2 = 1$) et donc aussi les fonctions analytiques hyperboliques. De la même façon elle absorbe les nombres duaux ($x + \alpha y$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha^2 = 0$) ainsi que les fonctions analytiques paraboliques.

Enfin elle permet de généraliser courbure et torsion dans $R(n, 0)$ et elle introduit des racines hyperboliques ou virtuelles pour toute équation algébrique admettant deux racines réelles au moins, si bien qu'une droite qui coupe une courbe algébrique en m points réels ($m > 1$) la coupe en m^2 points réels ou virtuels.

L'algèbre de Clifford permet une étude élégante de l'inversion et des produits d'inversion mais elle introduit surtout une inversion hyperbolique plane que étend aux hyperboles équilatères planes d'axe \vec{Ox} d'importantes propriétés de l'inversion circulaire. Deux points inverses sont alignés avec le pôle d'inversion, deux couples de points inverses sont sur une même hyperbole équilatère, l'anallagmatie hyperbolique s'applique aux courbes algébriques planes, les produits d'inversion hyperbolique ont des propriétés homologues des produits d'inversion circulaire. En ce qui concerne les propriétés angulaires, l'isogonalié remplace l'orthogonalité. L'inversion plane explique les propriétés métriques du quadrilatère inscrit (Ptolémée), l'inversion hyperbolique énonce le même résultat pour un quadrilatère inscrit dans une hyperbole équilatère.

L'application à la physique concerne l'électromagnétisme et l'équation de Dirac pour l'électron et permet d'étudier la rencontre d'un flux d'électrons libres avec un champ magnétique uniforme. L'interaction des électrons avec un milieu subquantique inobservable (pions et photons virtuels) permet de conclure à la non-localisation des électrons dans leur onde, c'est la double nature de l'électron. Il n'existe donc pas de théorie plus complète qui serait déterministe comme le voulait Einstein pour qui "Dieu ne joue pas aux dés". Dieu, s'il existe, joue aux dés, tout au moins avec les électrons libres.

La physique moderne, en introduisant un milieu subquantique inobservable, ouvre des perspectives nouvelles au matérialisme philosophique c'est-à-dire à l'explication de l'évolution sans intervention extérieure. Elle permet de concevoir comme possibles l'apparition de la vie sur la Terre et les mutations successives qui ont permis d'accéder au Royaume des idées où régnaient la technique et la science modernes.

2

L'ALGÈBRE DE CLIFFORD

Etant donné un espace vectoriel E_n de dimension n , on définit l'algèbre à l'aide de quatre axiomes qui caractérisent une base canonique de E_n .

1° $(e_i)^2 = 1$ ou -1 . L'espace est désigné par $R(p, q)$ ($p + q = n$).

2° Le carré d'un vecteur $x = x^i e_i$ ($i = 1, 2 \dots n$) est donné par cette forme quadratique réduite

$$x^2 = (x^i e_i)^2 = \sum_i (x^i)^2 (e_i)^2 + \sum_{i < j} x^i x^j (e^i e^j + e^j e^i),$$

ce qui suppose $e_i e_j + e_j e_i = 0$ pour tout $i \neq j$ ($i, j = 1, 2 \dots n$).

3° $(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$ pour tous $i, j, k = (1, 2 \dots n)$, associativité.

4° $\lambda e_i = e_i \lambda$ pour tout λ scalaire.

2.1 Dimension de L'Espace de Clifford Associé à E_n .

Soit des vecteurs $x^i e_i, y^j e_j, \dots, w^l e_l$ en nombre quelconque p . Leur produit est la somme de termes de la forme

$$\sum \lambda_p e_i e_j \dots e_l$$

où λ_p est un scalaire.

Il ne peut figurer dans ces produits que des vecteurs tous distincts, car si e_i est répété deux fois par exemple on peut par permutations successives, en vertu du second axiome, introduire $(e_i)^2$ qui est un scalaire. Il ne subsiste donc que des combinaisons de p vecteurs pris parmi les n vecteurs de la base canonique. Un nombre A de Clifford ($A \in CL(p, q)$) est donc la somme directe d'un scalaire, d'un vecteur, d'un bivecteur, d'un n -vecteur, soit un espace de dimension

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Produit de Deux Vecteurs.

$$(a^i e_i)(b^j e_j) = \sum_i a^i b^i (e_i)^2 + \sum_{i < j} (a^i b^j - a^j b^i) e_i e_j$$

$$ab = a \cdot b \text{ (produit intérieur)} + a \wedge b \text{ (produit extérieur)}$$

$$ba = a \cdot b + b \wedge a = a \cdot b - a \wedge b$$

$$a \cdot b = (ab + ba)/2, \quad a \wedge b = (ab - ba)/2$$

Ce produit réunit des notions distinctes, métrique ($a \cdot b$) et linéaire ($a \wedge b$). Cette singularité est à la base même de l'algèbre de Clifford.

Second Axiome. Il faut distinguer deux cas.

1° $(e_i)^2 = 1$ pour tout i . L'espace E_n est strictement euclidien. De

$$(e_1 + e_2)^2 = (e_1)^2 + (e_2)^2$$

on déduit que e_1 et e_2 sont orthogonaux (Théorème de Pythagore). De la méthode d'orthogonalisation de Schmidt on peut construire à partir d'une base quelconque f_1, f_2, \dots, f_n une base orthonormée. Posons

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 \\ e_2 &= \lambda f_1 + f_2 \end{aligned}$$

et déterminons le scalaire λ pur que $e_1 \cdot e_2 = 0$ soit

$$\lambda(f_1)^2 + e_1 \cdot f_2 = 0$$

Or $f_1 \neq 0$ implique $(f_1)^2 \neq 0$ et donc λ est bien déterminé, et ainsi de suite.

Il s'ensuit que tout vecteur a non nul a un inverse

$$a^{-1} = \frac{a}{a^2}$$

si bien qu'un produit ab n'est nul que si a ou b sont nuls. En effet $ab = 0$ implique a ou b égal à zéro. Si $a \neq 0$ il a un inverse

$$a^{-1}ab = (a^{-1}a)b = b = 0$$

De même si $b \neq 0$.

2° Dans l'espace pseudo-euclidien $R(p, q)$ où $pq > 0$, par exemple dans $R(1, 3)$, la base canonique e_0, e_1, e_2, e_3 n'est plus orthonormée mais seulement conjuguée par rapport à la forme quadratique réduite.

En effet le vecteur $e_0 + e_1$ vérifie

$$(e_0 + e_1)^2 = (e_0)^2 + (e_1)^2 = 0$$

compte tenu du second axiome. La méthode de Schmidt échoue donc car λ n'est plus déterminé puisque $f_1 = e_0 + e_1$ est différent de zéro tandis que $(f_1)^2 = 0$.

Le vecteur f_1 n'a donc pas d'inverse. Il n'existe pas de vecteur, colinéaire, qui soit unitaire c'est-à-dire dont le carré soit 1 ou -1 car

$$(\lambda f_1)^2 = \lambda^2 f_1^2 = 0$$

Produit en Croix. Dans $R(3, 0)$

$$a \wedge b = \sum (a^1 b^2 - a^2 b^1) e_1 e_2$$

$$a \times b = \sum (a^1 b^2 - a^2 b^1) e_3$$

Posons $e_1 e_2 e_3 = i_3$ avec $(i_3)^2 = -1$, d'où i_3 commutant avec tous les vecteurs

$$e_1 e_2 = i_3 e_3, \quad e_2 e_3 = i_3 e_1, \quad e_3 e_1 = i_3 e_2$$

$$a \wedge b = i_3 (a \times b)$$

$$a \times b = -i_3 (a \wedge b)$$

$a \times b$ est le produit en croix appelé souvent produit vectoriel (dans l'enseignement particulièrement).

3

COURBURE ET TORSION DANS $R(n, 0)$

Soit un arc défini sur un ouvert par

$$x = \sum_i e^i x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les x_i étant des fonctions trois fois dérivables du paramètre t et l'arc ds étant donné par

$$ds^2 = \sum_i (dx_i)^2,$$

T étant portée par la tangente orientée, un sens et une origine des arcs ayant été choisis

$$T = \frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad T^2 = 1, \quad (3.1)$$

on en déduit

$$T \frac{dT}{ds} + \frac{dT}{ds} T = 0,$$

donc $T \cdot dT/ds = 0$ et dT/ds est un vecteur normal à T . On le désigne par N/R , R étant le rayon de courbure. Si dT/ds est nul ou infini pour

certaines valeurs de t , ces points sont exclus, d'où

$$\frac{dT}{ds} = \frac{N}{R}. \quad (3.2)$$

On pose $B = TN = T.N + T \wedge N = T \wedge N$ et l'on dérive par rapport à s ,

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{R} + T \frac{dN}{ds} \quad (N^2 = 1). \quad (3.3)$$

Or dN/ds est un vecteur qui se décompose selon T, N et s vecteur du sous-espace supplémentaire, orthogonal à l'espace T, N dans $R(n, 0)$

Si $s^2 \neq 0$ on pose $s = \gamma S$, γ étant un scalaire et S un vecteur unitaire de carré 1

$$\frac{dN}{ds} = \alpha T + \beta N + \gamma S, \quad (3.4)$$

α, β, γ étant des scalaires convenables. Or

$$B^2 = T N T N = -1,$$

d'où l'on déduit

$$B \frac{dB}{ds} + \frac{dB}{ds} B = 0. \quad (3.5)$$

Multiplions (3.3) à gauche puis à droite par B . On obtient

$$B \frac{dB}{ds} = \frac{B}{R} + T N T \frac{dN}{ds} = \frac{B}{R} - N \frac{dN}{ds}$$

$$\frac{dB}{ds} B = \frac{B}{R} + T \frac{dN}{ds} T N$$

Ajoutons. On obtient

$$B \left(\alpha + \frac{1}{R} \right) = \beta.,$$

ce qui exige

$$\alpha = -\frac{1}{R}, \quad \beta = 0.$$

Posons $\gamma = 1/\theta$, θ étant le rayon de torsion, d'où

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{T}{R} + \frac{S}{\theta}. \quad (3.6)$$

Remplaçons dans (3.3)

$$\frac{dB}{ds} = \frac{(T \wedge S)}{\theta}. \quad (3.7)$$

Les formules (3.2), (3.6) et (3.7) permettent de calculer courbure et torsion dans $R(n, 0)$.

Reste le cas $s = 0$, soit $dN/ds + T/R = 0$ mais $d(RdT/ds)/ds + T/R = 0$ implique que les $T, dT/ds, d^2T/ds^2$ sont liés c'est-à-dire que les points correspondants sont d'inflexion, la torsion est nulle.

Cas $n = 3$. Dans ce cas le vecteur S est la binormale b . $S = b = T \times N$. Les formules (3.2) et (3.6) sont celles de Frenet. Reste la formule (3.7). Posons $TNb = i_3$. Alors

$$T \wedge b = i_3(T \times b) = -i_3N$$

$$T \wedge N = i_3(T \times N) = -i_3b$$

si bien que (3.7) devient en simplifiant par i

$$\frac{db}{ds} = -\frac{N}{\theta}.$$

Ce qui est bien la formule de Frenet, ainsi généralisées grâce à l'algèbre de Clifford.

4

PRODUIT DE TROIS VECTEURS

Soit a, b et c trois vecteurs de $R(p, q)$. En vertu du 3ème axiome

$$a(bc) = (ab)c = abc.$$

Dans les produits $e_i e_j e_k$, on prend $j = k$ puis $i = k$, enfin $i = j$ et i, j, k tous distincts. On obtient

$$abc = (b \cdot c)a - (a \cdot c)b + (a \cdot b)c + \text{trivecteur.}$$

Ce trivecteur est la somme de trivecteurs simples c'est-à-dire formés par trois vecteurs de base. Le coefficient de $e_i e_j e_k$ où $i < j < k$ est indéterminant si bien que ce trivecteur est une forme multilinéaire alternée et associative.

Démontrons l'associativité

$$a(bc) = T_1 + T_3$$

$$(ab)c = T'_1 + T'_3$$

T_1 et T'_1 sont des tenseurs d'ordre 1, T_3 et T'_3 des tenseurs d'ordre 3. De $T_1 - T'_1 = T'_3 - T_3$ on déduit $T_1 = T'_1$ et $T_3 = T'_3$ ce qui démontre l'associativité.

On peut conclure à l'alternance

$$a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = -(b \wedge a) \wedge c = -(b \wedge a \wedge c).$$

Quant à la multilinéarité elle résulte de la distributivité

$$a(b_1 + b_2)c = ab_1c + ab_2c.$$

On notera donc ce trivecteur $a \wedge b \wedge c$, d'où

$$abc = (b \cdot c)a - (a \cdot c)b + (a \cdot b)c + a \wedge b \wedge c.$$

5

FORMULES GÉNÉRALES

Posons

$$A_k = a_1 \wedge a_2 \cdots \wedge a_k, \quad k \leq n,$$

$a_1, a_2 \dots a_k$ et a étant des vecteurs de E_n on écrit

$$aA_k = a \cdot A_k + a \wedge A_k,$$

$a \cdot A_k$ tenseur d'ordre $k - 1$ et $a \wedge A_k$ tenseur d'ordre $k + 1$ suivant que $a_i e_i$, composante de a , appartient ou n'appartient pas à la composante de A_k . On écrit de la même façon

$$A_k a = A_k \cdot a + A_k \wedge a,$$

et les relations faciles à vérifier

$$a \cdot A_k = (-1)^{k-1} A_k \cdot a$$

$$A \wedge A_K = (-1)^k A_k \wedge a$$

6

CARRÉ D'UN n -VECTEUR DANS UN E_n

Soit $e_1 e_2 \dots e_n$ le n -vecteur d'une base canonique de E_n pour $R(p, q)$, p et q étant des entiers positifs de somme n . Ce n -vecteur A_n n'est défini qu'au signe près selon l'ordre des indices. Son carré est donc bien défini. Le signe de $(A_n)^2$ dépend de deux facteurs, le premier est le nombre de permutations nécessaire pour écrire $(A_n)^2$ sous la forme $(e_1)^2(e_2)^2 \dots (e_n)^2$ et le second dépend du nombre q de carrés précédés du signe moins dans la forme euclidienne ou pseudo-euclidienne $R(p, q)$.

6.1 Calcul de $(A_n)^2$

Pour écrire $(e_1)^2$ en tête dans

$$(A_n)^2 = e_1 e_2 \dots e_n e_1 e_2 \dots e_n,$$

il faut $n - 1$ permutations, puis $n - 2$ pour e_2 et ainsi de suite, soit

$$n - 1 + n - 2 + \cdots + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Le signe de $(A_n)^2$ est donc donné par -1 avec un exposant

$$\frac{n(n - 1)}{2} + q.$$

Si donc $\frac{n(n-1)}{2} + q = 0$ voir (6.2), $(A_n)^2 = 1$

Si $n(n - 1)/2 + q = 1$ voir (6.2), $(A_n)^2 = -1$.

Il faut donc résoudre les congruences

$$n(n - 1) = 0 \quad [4], \quad (6.1)$$

$$n(n - 1) = 2 \quad [4]. \quad (6.2)$$

1° La congruence (6.1) est vraie pour $n = 0, 1$ [4].

Si elle est vraie, $(A_n)^2 = 1$ si q est pair, mais elle est encore vraie si l'on ajoute 1 aux deux membres donc si q est impair. Elle correspond alors à $(A_n)^2 = -1$.

On résume ces deux cas dans la formule unique

$$(A_n)^2 = (-1)^q. \quad (6.3)$$

2° La congruence (6.2) est vraie si $n = 2, 3$ [4].

Si elle est vraie, $(A_n)^2 = -1$ si q est pair, mais elle est encore vraie si q est impair et elle correspond alors à $(A_n)^2 = 1$. On résume dans la formule unique

$$(A_n)^2 = (-1)^{q+1} \quad (6.4)$$

Ainsi $(A_n)^2$ est calculé pour toute valeur de n et pour toute forme quadratique.

6.2 Notations et Commutativité

Si $(A_n)^2 = 1$ on peut poser $A_n = \varepsilon_n$ avec $(\varepsilon_n)^2 = 1$ et si $(A_n)^2 = -1$ on posera $A_n = i_n$ avec $(i_n)^2 = -1$ et ceci doit être compris comme de simples notations.

Soit a et b des réels on développe $\exp a \varepsilon_n$ et $\exp b i_n$ en séries entières ce qui permet d'écrire

$$\exp a \varepsilon_n = \cosh a + \varepsilon_n \sinh a, \quad (6.5)$$

$$\exp b i_n = \cos b + i_n \sin b. \quad (6.6)$$

La formule $\exp(A+B) = \exp A \exp B$ où A et B sont deux nombres de Clifford est vraie si A et B commutent. Il suffit de développer en séries entières et d'appliquer la formule du binôme de Newton dans un anneau commutatif. Il est donc intéressant de savoir si ε_r et i_n commutent ($r < n$). Le théorème suivant fournit une réponse au moins partielle.

Définition. E_r sera dit inclus dans E_n au sens de Clifford si les r vecteurs d'une base canonique de E_r sont dans leur ordre les n premiers vecteurs d'une base canonique de E_n .

Théorème.

I. Si E_r est inclus dans E_n au sens de Clifford, on pose

$A_r = e_1 e_2 \dots e_r$, $A_{n-r} = e_{r+1} e_{r+2} \dots e_n$, $A_n = A_r A_{n-r}$. Si $r = 0$ voir (6.2) ou si $n - r = 0$ voir (6.2), alors A_r , A_{n-r} et A_n commutent deux à deux.

II. On peut énoncer ce résultat sous une forme un peu différente: A_r , A_{n-r} et A_n commutent deux à deux si, et seulement si

$$(A_n)^2 = (A_r)^2 (A_{n-r})^2. \quad (6.7)$$

Démonstrations.

1° Commençons par le second énoncé. Si (6.7), alors

$$A_r A_{n-r} A_r A_{n-r} = A_r A_r A_{n-r} A_{n-r}, \quad (6.8)$$

et en multipliant à gauche par A_r et à droite par A_{n-r} puis en simplifiant par $(A_r)^2$ et par $(A_{n-r})^2$ on obtient la commutation de A_r et de A_{n-r} .

On opère de même pour vérifier la commutation de A_r et de A_n puis celle de A_{n-r} et de A_n .

De même on vérifie sur (6.8) que la condition est nécessaire.

2° Nous démontrons le premier énoncé du théorème.

Nous écrivons que A_r commute avec A_{n-r} , soit

$$A_r A_{n-r} = A_{n-r} A_r = A_{n-r} e_1 e_2 \dots e_r.$$

Après $n - r$ permutations e_1 se place devant A_{n-r} , puis e_2 après $n - r$ permutations et ainsi de suite. Il y a donc $r(n - r)$ permutations. Il faut donc résoudre la congruence $r(n - r) = 0$ d'où $r = 0$ ou $n - r = 0$, voir (6.2).

Applications.

1° Nous appliquons à $R(2, 0)$ et à $R(3, 0)$ inclus au sens de Clifford. On pose $e_1 e_2 = i'$ et $e_1 e_2 e_3 = i$. Alors i' , i et e_3 commutent et Pertti Lounesto en a tiré profit pour écrire $\log e_3$ [1, 2].

2° Nous donnons un second exemple en posant dans $R(1, 3)$

$$A_2 = e_0 e_1, \quad e_2 e_3 = i', \quad e_0 e_1 e_2 e_3 = i,$$

d'où $e_1 e_0 = i'$ $i = \exp \pm \frac{\pi}{2}(i + i')$, et la détermination principale d'un logarithme avec les précautions nécessaires, $\log e_1 e_0 = \pm \frac{\pi}{2}(i + i')$.

6.2.1 Définition. Vecteurs Liés

1° \bar{A} est le nombre de Clifford déduit de A en remplaçant chaque vecteur par son opposé. Si $\bar{A} = A$, A est pair. Si $\bar{A} = -A$, A est impair.

2° Si \tilde{A} est le nombre obtenu en renversant l'ordre dans tous les produits de vecteurs de A et si $\tilde{A} = A$, A est stable, si $\tilde{A} = -A$, A est renversé

3° Si A et B de Clifford admettent des inverses A^{-1} et B^{-1} , alors AB admet un inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$\text{car } B^{-1}A^{-1}AB = ABB^{-1}A^{-1} = 1.$$

4° Nous démontrons le théorème

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k = 0 \text{ si, et seulement si les vecteurs sont liés.}$$

a) Si les vecteurs sont liés, $A_k = 0$

Si les vecteurs sont liés l'un d'eux est fonction linéaire des $k - 1$ restants, en substituant dans A_k et en développant on obtient une somme de produits tous nuls comme possédant deux vecteur égaux.

b) Reste la réciproque. On peut la démontrer en annulant tous les déterminants extraits du tableau des k vecteurs mais on peut en donner une démonstration géométrique en plongeant les k vecteurs dans une métrique euclidienne puisque cette proposition linéaire est indépendante de la métrique. On fait alors une démonstration par récurrence.

Si $k = 2$, $a_2 = \lambda a_1 + \varepsilon$, ε étant orthogonal à a_1 et λ scalaire.

$$a_1 \wedge (\lambda a_1 + \varepsilon) = a_1 \wedge \varepsilon \text{ et } a_1 \varepsilon = \varepsilon \cdot a_1 + \varepsilon \wedge a_1 = 0,$$

ou $\varepsilon = 0$ et le théorème est prouvé, ou ε admet un inverse. Alors $A_2 = 0$ implique $a_1 \varepsilon = 0 = a_1$ et le théorème est prouvé.

Le théorème est admis pour $k - 1$. On décompose a_k selon u appartenant à l'espace vectoriel A_{k-1} et ε orthogonal à A_{k-1} . On pose

$$a_k = u + \varepsilon,$$

$$\text{et } A_k = A_{k-1} \wedge (u + \varepsilon) = A_{k-1} \wedge u + A_{k-1} \wedge \varepsilon$$

$$\text{et } A_k = 0 \text{ implique } A_{k-1} \wedge \varepsilon = 0.$$

Or

$$A_{k-1} \varepsilon = A_{k-1} \bullet \varepsilon = 0$$

Même conclusion que pour $k = 2$, $A_{k-1} = 0$ et le théorème.

7

INVERSION ET PRODUITS D'INVERSIONS

Nous nous plaçons dans un espace euclidien R_n dont la métrique est définie positive si bien qu'un vecteur ne peut être nul que si toutes ses composantes sont nulles.

Soit a un vecteur quelconque. On définit son inverse a^{-1} par

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \quad \text{si } a \neq 0,$$

d'où $a^{-1} = a/a^2$ ce qui prouve, a^2 étant un scalaire non nul, que a et a^{-1} sont colinéaires.

Tous les calculs sont valables quelle que soit la dimension $n \geq 2$ de l'espace R_n .

7.1 Symétrie par Rapport à un Plan.

On appelle plan une variété à $n-1$ dimensions, définie par son vecteur normal $u(u^2 = 1)$ et unitaire.

Soient M et M' deux points de $R_{(r=n-1)}$. On pose

$$O\vec{M} = x, \quad O\vec{M}' = x',$$

O étant l'origine des coordonnées. Si

$$x' = -uxu. \quad (7.1)$$

Je dis que M et M' sont symétriques par rapport au plan (P) passant par O . Traitons (7.1) comme une **équation cliffordienne** que l'on récrit

$$\begin{aligned} ux' + xu &= 0, \\ u \cdot (x + x') + u \wedge (x' - x) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique deux conditions $u \cdot (x + x') = 0$, et $x' - x$ parallèle à u qui suffisent à établir la propriété.

Puisque M' est symétrique de M , M est symétrique de M' et l'on écrit

$$x = -ux'u.$$

7.1.1 Inversion

On dit que M et M' sont inverses dans l'inversion de pôle O et de puissance k non nulle, si

$$Xx = k = X \cdot x + X \wedge x \quad (O\vec{M} = x, O\vec{M}' = X), \quad (7.2)$$

et l'annulation du bivecteur implique que O , M et M' sont alignés. La relation de définition se récrit encore

$$X = kx^{-1} = \frac{kx}{x^2}.$$

Si k est positif, les points invariants dans l'inversion sont réels. Ils sont définis par $x = X$ et $x^2 = k$ et sont situés sur la sphère de centre O et de rayon \sqrt{k} .

Si X et x sont des fonctions dérivables d'un paramètre t , M et M' décrivent deux courbes inverses. En dérivant (7.2) on obtient

$$X'(t)x(t) + X(t)x'(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$X'(t) = -Xx'(t)x^{-1} = -Xx'(t)Xk^{-1},$$

qui prouve que $X'(t)$ et $x'(t)$ ont des supports symétriques par rapport au plan médiateur de MM' .

Si deux courbes se coupent en M , leurs inverses se coupent en M' inverse de M et leurs tangentes seront symétriques par rapport au plan médiateur de MM' , si bien que les angles seront conservés en valeur absolue.

Si $n = 2$, la symétrie par rapport à une droite change le sens des angles.

7.1.2 Produit de Deux Inversions

1. Les Inversions Ont Mêmes Pôles.

Soit $Xx = k$ la relation entre deux points inverses M et M' et soit $XY = k'$ la relation entre M' et M'' inverses dans (O, k') . Éliminons X . On obtient $Ykx^{-1} = k'$, c'est-à-dire

$$Y = \frac{k'}{k}x.$$

Le produit des deux inversions est une homothétie de rapport k'/k .

2. Les Deux Inversions Ont des Pôles Différents.

Soit (O, k) et (A, k') les deux inversions, d'où

$$Xx = k, \tag{7.3}$$

$$(Y - \alpha u)(X - \alpha u) = k', \tag{7.4}$$

α étant un scalaire différent de zéro et u un vecteur unitaire.

a) On cherche les points communs aux sphères d'inversion, soit

$$x^2 - k = x^2 - \alpha(ux + xu) + \alpha^2 - k'.$$

C'est le plan $2u \cdot x = (\alpha^2 + k - k')/\alpha$, perpendiculaire à u et appelé **plan radical** des deux inversions. On pose $u \cdot x = \beta$ avec

$$\frac{(\alpha^2 + k - k')}{2\alpha} = \beta. \tag{7.5}$$

b) **Points de Poncelet.**

On appelle points de Poncelet les sphères de rayon nul du faisceau linéaire des sphères d'inversion

$$m(x^2 - k) + (x - \alpha u)^2 - k' = 0, \quad (7.6)$$

m étant un paramètre, soit en développant

$$(1 + m)x^2 - 2\alpha u \cdot x + \alpha^2 - k' - mk = 0.$$

On écrit que le centre de cette sphère est sur la sphère, soit pour le centre $zu = \alpha u / (1 + m)$ et il est sur la sphère, soit tous calculs faits

$$z^2 - 2\beta z + k = 0,$$

d'où deux points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, symétriques par rapport au plan radical

$$z = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - k},$$

situés sur l'axe OA dont on retiendra la condition de réalité

$$\beta^2 \geq k. \quad (7.7)$$

c) **Etudions le produit de ces deux inversions.**

Éliminons X entre (7.3) et (7.4)

$$(Y - \alpha u)(kx^{-1} - \alpha u) = k'. \quad (7.8)$$

Introduisons le symétrique x' de x par rapport au plan radical

$$x' - \beta u = -u(x - \beta u)u, \quad \text{soit} \quad ux = 2\beta - x'u. \quad (7.9)$$

Remplaçons dans (7.8). On obtient

$$(Y - \alpha u)(k - 2\alpha\beta + \alpha x'u) = k'(2\beta u - ux'u).$$

Développons et ordonnons après multiplication à droite par u

$$\alpha Y x' - ux'(\alpha^2 - k') + Yu(k - 2\alpha\beta) = 2\beta k' + \alpha k - 2\alpha^2\beta.$$

Identifions avec l'inversion (C, k'') avec $c = \gamma u$ (γ réel)

$$(Y - \gamma u)(x' - \gamma u) = k''.$$

D'où les conditions nécessaires et suffisantes

$$c = \gamma u = \left(\frac{\alpha - k'}{\alpha}\right)u \quad (7.10)$$

$$c = \gamma u = \left(\frac{2\beta - k}{\alpha}\right)u \quad (7.11)$$

$$k'' = \frac{2\beta}{\alpha k'} + k - 2\alpha\beta + \gamma^2 \quad (7.12)$$

Les relations (7.10) et (7.11) sont compatibles en prenant pour β l'abscisse du plan radical.

Les trois centres O, A, C sont alignés. Le point C est défini par (7.10). De plus, si $\vec{OB}' = 2bu$ et si $2b \neq \alpha$, on voit que $B'C/\vec{AC} = k/k'$ c'est-à-dire que C partage le segment $B'A$ dans le rapport k/k' .

La puissance d'inversion k'' est donnée par (7.12). On trouve, tous calculs faits $k'' = kk'/\alpha^2$.

Le produit de deux inversions se décompose en une symétrie par rapport au plan radical suivie d'une inversion de centre C et de puissance kk'/α^2 .

Points Invariants dans le Produit de Deux Inversions.

Ces points sont définis par (7.8) où l'on remplace Y par x

$$k - \frac{\alpha ukx}{x^2} - \alpha xu = k' - \alpha^2. \quad (7.13)$$

Développons les produits ux et xu en algèbre de Clifford

$$ux = u \cdot x + u \wedge x$$

$$xu = u \cdot x - u \wedge x$$

et substituons dans (7.13). On obtient

$$\left(\frac{k}{x^2} + 1\right)u \cdot x + \left(\frac{k}{x^2} - 1\right)u \wedge x = 2\beta. \quad (7.14)$$

C'est une **équation cliffordienne** qui exige que ses parties scalaire et vectorielle soient toutes deux nulles.

1. $x^2 = k$ et $u \cdot x = \beta$, c'est l'intersection de la première sphère d'inversion et du plan radical. Cette intersection est réelle si k est positif et si $\beta^2 < k$, et cela quel que soit le signe de k' mais, si k' est négatif, la seconde condition est impossible car elle s'écrit

$$(\alpha^2 + k)^2 - 2k'(\alpha^2 + k) + k'^2 < 4\alpha^2 k \text{ soit}$$

$$(\alpha^2 - k)^2 - 2k'(\alpha^2 + k) + k'^2 < 0$$

ce qui est impossible. Ce cas exige donc des sphères d'inversion **réelles** et **sécantes**.

2. La partie bivectorielle est nulle si $x = zu$ (z réel) et si $(k/z^2 + 1)z = 2\beta$

$$\text{soit } z^2 - 2\beta z + k = 0.$$

Ce sont les **points de Poncelet** qui ne sont **réels** que pour $\beta^2 > k$. Ainsi **dans le domaine réel ces deux cas s'excluent mutuellement**. Reste le cas intermédiaire $\beta^2 = k$ avec k positif. Les points de Poncelet sont confondus avec le point de contact de la première sphère et du plan radical.

8

PRODUIT DE TROIS INVERSIONS

Nous utilisons l'algèbre de Clifford de $R(n, 0)$ pour étudier les points invariants dans le produit de trois inversions dont les centres sont alignés. Soient S_1 , S_2 et S_3 ces inversions.

Nous notons ces inversions (O, k) , O étant l'origine, puis (A, k') en posant $\vec{OA} = \alpha u$ et (B, k'') en posant $\vec{OB} = \beta u$. Nous supposons α réel positif, β réel, u vecteur unitaire, k, k', k'' strictement positifs. Nous rappelons tout d'abord que le produit des deux inversions S_1 et S_2 se réduit à une symétrie par rapport au plan radical suivie d'une inversion S . Le plan radical se définit par $u \cdot x = r$ ($x = O\vec{M}$, r réel) et

$$r = \frac{\alpha^2 + k - k'}{2\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0. \quad (8.1)$$

L'inversion S a pour centre su (s , réel) et pour puissance ρ . On sait que (I)

$$s = \alpha - \frac{k'}{\alpha}, \quad \rho = \frac{kk'}{\alpha^2}. \quad (8.2)$$

Ceci étant, on vérifie aisément que **la sphère d'inversion de S appartient au faisceau linéaire des sphères d'inversion de S_1 et de S_2** . On suppose tout d'abord que β est supérieur à α .

Position du Problème.

Soit un point M ($\vec{OM} = x$) et son inverse M' ($\vec{OM}' = X$) dans l'inversion (O, k) . Alors

$$Xx = k. \quad (8.3)$$

Soit M'' ($\vec{OM}'' = Y$) l'inverse de M' dans l'inversion (A, k') avec $\alpha > 0$

$$(X - \alpha u)(Y - \alpha u) = k'. \quad (8.4)$$

Soit M l'inverse de M'' dans l'inversion (B, k'') avec

$$(x - \beta u)(Y - \beta u) = k''. \quad (8.5)$$

Equation des Points Invariants.

Il faut éliminer Y entre (8.5) et (8.4) réécrite sous la forme

$$(Y - \alpha u)(kx^{-1} - \alpha u) = k', \quad (8.6)$$

si $x \neq 0$. On déduit de (8.5) si $x - \beta u \neq 0$

$$Y - \beta u = k''(x - \beta u)^{-1}, \quad (8.7)$$

et en portant dans (8.6) l'équation cherchée

$$[(\beta - \alpha)u + k''(x - \beta u)^{-1}](kx^{-1} - \alpha u) = k'. \quad (8.8)$$

Développons

$$(\beta - \alpha)u(kx^{-1} - \alpha u) + k''(x - \beta u)^{-1}(kx^{-1} - \alpha u) = k',$$

ce qui se réécrit

$$k' - k(\beta - \alpha)ux^{-1} + \alpha(\beta - \alpha) = k''(x - \beta u)^{-1}(kx^{-1} - \alpha u), \quad (8.9)$$

et, en multipliant à gauche par $x - \beta u$

$$\begin{aligned} (x - \beta u)[k' + \alpha(\beta - \alpha)] - k(\beta - \alpha)xux^{-1} + k(\beta - \alpha)\beta x^{-1} = \\ = kk''x^{-1} - \alpha k''u \end{aligned} \quad (8.10)$$

En multipliant à droite par x on obtient en posant $k' = \alpha(\beta - \alpha) = K > 0$

$$Kx^2 - (K\beta - \alpha k'')ux - k(\beta - \alpha)xu = k[k'' - \beta(\beta - \alpha)]. \quad (8.11)$$

C'est une **équation cliffordienne** qui se décompose en sa partie scalaire et sa partie bivectorielle selon

$$Kx^2 + u.x[\alpha k'' - K\beta - k(\beta - \alpha)] = kk'' - k\beta(\beta - \alpha), \quad (8.12)$$

$$[(\alpha k'' - K\beta) + k(\beta - \alpha)]u \wedge x = 0, \quad (8.13)$$

et ces deux équations doivent être simultanément vérifiées.

Nous étudions spécialement la condition

$$\alpha k'' - \beta k' + k(\beta - \alpha) = \alpha\beta(\beta - \alpha), \quad (8.14)$$

qui n'intéresse que la situation des sphères d'inversion. Montrons qu'elle implique que les sphères d'inversion appartiennent à un même faisceau linéaire. En effet, il faut identifier pour tout x

$$m(x^2 - k) + (x - \alpha u)^2 - k' \quad \text{et} \quad (1 + m)[(x - \beta u)^2 - k''],$$

ce qui conduit à deux conditions, m étant un paramètre

$$\begin{aligned} -2\alpha u.x &= (1 + m)(-2\beta u.x) \\ -mk + \alpha^2 - k' &= (1 + m)(\beta^2 - k'') \end{aligned}$$

et l'élimination de m entre ces deux conditions redonne (8.14) qui est ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les trois sphères d'inversion appartiennent au même faisceau.

On peut dès lors aborder la discussion du système (8.12) et (8.13).

Discussion.

1°. Les trois sphères appartiennent au même faisceau. Alors (8.13) est satisfaite, il ne reste que la condition (8.12). Celle-ci s'identifie avec l'appartenance à une sphère Σ centrée en γu et de rayon égal à R . En effet identifions avec $K(x - \gamma u)^2 - KR^2$. On obtient

$$-2K\gamma = \alpha k'' - K\beta - k(\beta - \alpha) = -2k(\beta - \alpha), \quad (8.15)$$

compte-tenu de (8.13) et

$$KR^2 = kk'' - k\beta(\beta - \alpha) + K\gamma^2. \quad (8.16)$$

On résoud le système (8.15) et (8.16) et l'on obtient, tous calculs faits,

$$\gamma = \frac{k(\beta - \alpha)}{K} \text{ pour le centre } \gamma,$$

$$K^2R^2 = kk'k'' \text{ pour le rayon } R.$$

La sphère, ensemble des points invariants, est donc réelle et l'on vérifie facilement qu'elle **appartient au faisceau**.

2°. L'équation (8.13) admet aussi la solution $u \wedge x = 0$ c'est-à-dire $x = \rho u$ (ρ réel), ce qui conduit, en portant dans (8.12), à

$$K\rho^2 + \rho(\alpha k'' - K\beta - k(\beta - \alpha)) = kk'' - k\beta(\beta - \alpha). \quad (8.17)$$

Ici les sphères n'appartiennent pas au même faisceau et nous montrerons qu'il y a toujours deux points invariants (Voir Remarques II, III, IV)

3°. Le cas $x = 0$ ayant été écarté, il faut l'examiner spécialement. Si M est en O , M' est à l'infini et M'' est en A . Si donc $k'' = \beta(\beta - \alpha)$, l'inverse de M'' sera à nouveau en O qui sera ainsi invariant.

De même le cas $x = \beta u$ a été écarté. Si M est en B , et si $k = \alpha\beta$, M' sera en A , donc M'' sera à l'infini et son inverse sera en B qui sera ainsi invariant, et cette condition $k = \alpha\beta$ est nécessaire.

Remarques.

I. La première remarque concerne le premier cas de cette discussion. On écrit symboliquement

$$S_1 S_2 = PS, \quad (8.18)$$

P désignant la symétrie par rapport au plan radical de S_1 et de S_2 . Et ensuite

$$S_1 S_2 S_3 = P S S_3 = PP\Sigma. \quad (8.19)$$

Mais $P^2 = I$ (identité), Σ est une sphère, et (8.19) se réduit à

$$S_1 S_2 S_3 = \Sigma. \quad (8.20)$$

Le produit de trois inversions est alors équivalent à une inversion unique et l'algèbre de Clifford nous a permis d'en calculer aisément le centre et le rayon, quelle que soit la dimension n de l'espace euclidien.

II. On suppose maintenant $\beta < \alpha$.

Alors la condition $s = \beta$ devient possible. Elle suppose $\beta = \alpha - k'/\alpha$ c'est-à-dire $K = 0$.

Examinons ce cas particulier. Comme S et S_3 appartiennent au faisceau et ont même centre,

$$S_3 = S, \quad (8.21)$$

$$\text{et } S_1 S_2 S_3 = PSS = PS^2, \quad (8.22)$$

$$\text{mais } S^2 = I \text{ et } S_1 S_2 S_3 = P. \quad (8.23)$$

Le produit est une **symétrie** par rapport à P , invariant. La sphère Σ dégénère en deux plans dont un est à l'infini.

Dans le cas général rien n'est changé au premier résultat: le produit de trois inversions est toujours une inversion unique, mais si les trois sphères d'inversion n'appartiennent pas au même faisceau il faut reprendre la discussion de l'équation (8.17):

Si $K = 0$, S_3 a même centre que S mais n'a pas le même rayon. Il s'ensuit que (8.17) n'a qu'une racine, le coefficient de ρ étant toujours différent de zéro. Il y a deux points invariants dont un à l'infini sur l'axe.

Si $K \neq 0$ nous écrivons $S_1 S_2 S_3 = PQ\Sigma$, Q plan radical de S et de S_3 . PQ est une translation tu (t réel). Transportons l'origine au centre de Σ .

Soit y un point quelconque de l'espace. Il sera invariant si et seulement si $(y + tu)^{-1} k_1 = y$ ou $k_1 = y(y + tu) = y^2 + tyu$.

L'annulation de $u \wedge y$ implique $y = \rho u$, d'où l'équation aux points invariants

$$\rho^2 + \rho t - k_1 = 0,$$

qui admet toujours deux racines réelles, d'où deux points invariants sur l'axe, k_1 étant la puissance positive de l'inversion Σ .

III. Reste $\alpha = \beta \neq 0$.

Si les sphères appartiennent au même faisceau, alors $S_2 = S_3$ et $S_1 S_2 S_3 = S_1 (S_2)^2 = S_1 I = S_1$, c'est le cas général.

Si $S_2 \neq S_3$ donc si $k'' \neq k'$, il reste l'équation (8.17) qui a deux racines réelles et dont le discriminant $\alpha^2(k - k')^2 + 4kk'k''$ est positif.

IV. Reste $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$. Les sphères d'inversion n'appartiennent pas au même faisceau, le plan radical de S_1 et de S_2 étant alors le plan à l'infini. Comme $K = k'$ il y a deux points invariants réels selon (8.17), dont le discriminant $\beta^2(k - k')^2 + 4kk'k''$ est positif.

V. Si $\alpha = \beta = 0$, P est à l'infini, les trois sphères appartiennent au même faisceau. Le produit est une inversion de centre O et de puissance kk''/k' .

Conclusion.

Nous considérons trois inversions appartenant au même faisceau. Si $K \neq 0$, leur produit est une inversion unique. Si $K = 0$, la sphère d'inversion se décompose en deux plans, le plan radical commun et le plan à l'infini de l'espace. L'inversion se réduit à une symétrie par rapport à un plan.

8.1 Produit de Trois Inversions de Centres Coplanaires

Nous utilisons l'algèbre de Clifford dans $R(n, 0)$ pour étudier le produit de trois inversions de centres quelconques. La première a O (origine) pour

centre, la seconde a pour centre A tel que $\vec{OA} = au(u^2 = 1$ et a réel), la troisième a pour centre B tel que $\vec{OB} = bv(v^2 = 1$ et b réel). Les inversions ont toutes des puissances positives k, k', k'' .

On suppose enfin $u \wedge v \neq 0$, le cas $u \wedge v = 0$ ayant été étudié précédemment et on posera $u \cdot v = \cos \theta$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

Dans l'inversion (O, k) , M a pour inverse M' ($O\vec{M}' = X$). Dans l'inversion (A, k') , M' a pour inverse M'' ($O\vec{M}'' = Y$) et dans l'inversion (B, k'') , M'' a pour inverse M puisque M est supposé invariant.

Position du Problème.

Nous écrivons les équations cliffordiennes

$$Xx = k \text{ ou } X = kx^{-1} \text{ si } x \neq 0, \quad (8.1.1)$$

$$(X - au)(Y - au) = k', \quad (8.1.2)$$

$$(x - bv)(Y - bv) = k'' \text{ ou } Y - bv = k''(x - bv)^{-1} \text{ si } x \neq bv. \quad (8.1.3)$$

En portant (8.1.3) dans (8.1.2) on élimine Y et X , soit

$$(kx^{-1} - au) [bv - au + k''(x - bv)^{-1}] = k',$$

et en multipliant par $x - bv$ à droite et par x à gauche

$$(k - axu)(bv - au)(x - bv) + k''(k - axu) = k'x(x - bv). \quad (8.1.4)$$

Développons

$$\begin{aligned} & bkvx - abxuvx - b^2k + ab^2xu - akux + a^2x^2 + abkuv - a^2bxv + \\ & + kk'' - ak''xu = k'x^2 - bk'xv \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Calculons

$$\begin{aligned} xuvx &= x(uv)x = x^2(u \cdot v) + x(u \wedge v)x = x^2 \cos \theta + [x \cdot (u \wedge v)]x \\ &+ (x \wedge u \wedge v)x \end{aligned}$$

$$xuvx = x^2 \cos \theta + 2(v \cdot x)(x \wedge u) - 2(u \cdot x)(x \wedge v) + x^2(u \wedge v). \quad (8.1.6)$$

On reporte dans (8.1.5) et l'on obtient une **équation cliffordienne** qui se décompose dans sa partie bivectorielle et sa partie scalaire selon

$$\begin{aligned} a(u \cdot x)(b^2 - k - k'') + b(v \cdot x)(k + k' - a^2) &= x^2(k' + ab \cos \theta - a^2) \\ &+ b^2k - abk \cos \theta - kk'' \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

$$\begin{aligned} a(u \wedge x)(2b(x \cdot v) - b^2 - k + k'') + b(v \wedge x)(k - 2a(x \cdot u) + a^2 - k') \\ = ab(u \wedge v)(x^2 - k) \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Discussion.

Nous portons notre attention sur l'équation (8.1.8).

Posons $x = ru + sv + tw$, w étant un vecteur unitaire de la variété linéaire à $n - 2$ dimensions orthogonale au plan (u, v) . Alors

$$(u \wedge v \wedge x) = t(u \wedge v \wedge w).$$

1° Nous supposons $t \neq 0$ et, en multipliant (8.1.8) par $u \wedge, v \wedge, w \wedge$, on obtient successivement

$$u \cdot x = \frac{(k - k' + a^2)}{2a} = d, \quad (8.1.9)$$

$$v \cdot x = \frac{(k - k'' + b^2)}{2b} = d' \quad (8.1.10)$$

$$x^2 - k = 0. \quad (8.1.11)$$

L'équation (8.1.9) est l'équation du plan radical des sphères d'inversion S_1 de centre O et S_2 de centre A .

L'équation (8.1.10) est l'équation du plan radical des sphères d'inversion de S_1 et de S_3 .

Ces deux plans se coupent selon une variété à $n-2$ dimensions. L'intersection de cette variété et de la sphère S_1 est évidemment invariante dans le produit. Si $n = 3$, les deux plans radicaux se coupent selon une droite. Si cette droite, axe radical des trois sphères d'inversion, rencontre S_1 en deux points réels I et J ces points sont invariants dans le produit, mais la recherche précédente a l'avantage de montrer que ces points sont les seuls invariants possibles pour $t \neq 0$.

Les équations (8.1.9) et (8.1.10) forment un système de Cramer dont les solutions sont $r = (d - d' \cos \theta) / \sin^2 \theta$, $s = (d' - d \cos \theta) / \sin^2 \theta$. Si l'on substitue ces résultats dans (8.1.7) en tenant compte de (8.1.11) on constate que (8.1.7) est identiquement vérifiée, comme il se doit. Reste la condition t^2 positif qui exige

$$k > r^2 + s^2 + 2rs \cos \theta,$$

d'où la condition nécessaire et suffisante

$$k > \frac{(d^2 + d'^2 - 2dd' \cos \theta)}{\sin^2 \theta}. \quad (8.1.12)$$

8.1.1 Interprétation Géométrique

$$\text{Soit } ud = u \cdot x = OD,$$

$$vd' = v \cdot x = OD',$$

D et D' sont les pieds des axes radicaux des sphères (O, A) et (O, B)

$$DD'^2 = d^2 = d'^2 - 2dd' \cos \theta$$

Si r est le rayon du cercle circonscrit à ODD' , la condition (8.1.12) s'écrit

$$k > 4r^2 \quad (8.1.12bis)$$

Remarque.

Si S, S', S'' sont les sphères des trois inversions $SS' = P\Sigma$, Σ étant une sphère d'inversion et

$$SS'S'' = P\Sigma S''.$$

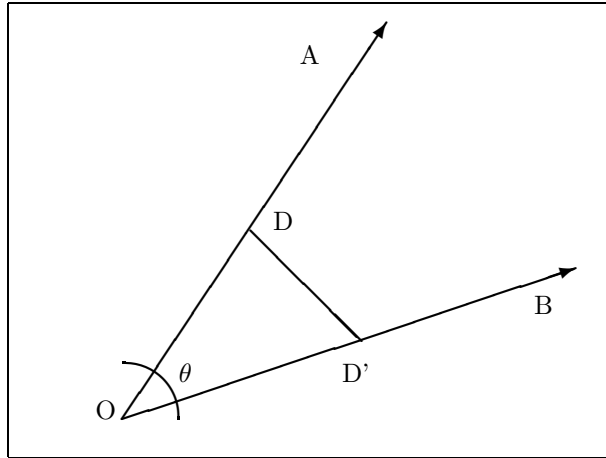


Figure 1

Si Q est le plan radical de Σ et de S''

$$SS'S'' = PQ\Sigma'.$$

Le produit de trois inversions est le produit d'une rotation et d'une inversion Σ' .

2° Reste le cas $t = 0$, c'est-à-dire la recherche des points invariants dans le plan (u, v) . Il faut reprendre (8.1.7) et (8.1.8) qui se réécrivent facilement en tenant compte de $x = ru + sv$, ce qui fournit les équations de deux cercles. En particulier l'équation (8.1.8) devient

$$x^2 - 2(sd' + rd) + k = 0, \quad (8.1.13)$$

la recherche du centre (f, g) conduit au-système

$$g + f \cos \theta = d', \quad (8.1.14)$$

$$f + g \cos \theta = d. \quad (8.1.15)$$

Nous cherchons des points invariants réels, il faut donc que ce cercle soit réel. Le calcul de son rayon R donne la condition nécessaire

$$\frac{k < (d^2 + d'^2 - 2dd' \cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \quad (8.1.16)$$

$$\text{avec } R^2 = \frac{(d^2 + d'^2 - 2dd' \cos \theta)}{\sin^2 \theta - k}. \quad (8.1.17)$$

Nous cherchons la puissance du centre (f, g) par rapport au cercle (8.1.7) en remarquant que (8.1.14) et (8.1.15) ont les mêmes solutions que (8.1.9) et (8.1.10) qui vérifient identiquement (8.1.7) avec (8.1.11), c'est-à-dire que

$$ad(b^2 - k - k'') + bd'(k + k' - a^2) = k(k' + ab \cos \theta - a^2) + b^2k - abk \cos \theta - kk''.$$

α) Si $k' + ab \cos \theta - a^2 = 0$, le centre du cercle (8.1.8) est sur (8.1.7) qui est alors un diamètre du cercle (8.1.8).

β) Si $k' + ab \cos \theta - a^2 \neq 0$, on déduit de l'identité précédente la puissance du centre (f, g) par rapport au cercle (8.1.7), soit

$$x^2(f, g) - k = \frac{(d^2 + d'^2 - 2dd' \cos \theta)}{\sin^2 \theta} - k = R^2,$$

ce qui prouve que (8.1.7) et (8.1.8) sont des cercles orthogonaux, donc sécants. La condition (8.1.16) est donc suffisante.

Conclusion.

Dans le domaine réel les conditions (8.1.12) et (8.1.16) s'excluent mutuellement. Si (8.1.12) est satisfaite, les points invariants sont à l'intersection d'une variété linéaire à $n - 2$ dimensions et de la sphère d'inversion S_1 .

Si $n = 3$ il y a deux points invariants.

Si la condition (8.1.16) est satisfaite les points précédents sont imaginaires mais il y a deux points invariants réels dans le plan (u, v) .

9

PRODUIT DE QUATRE INVERSIONS DE CENTRES NON COPLANAIRES

Afin de simplifier des calculs assez complexes, nous supposons que, S_1, S_2, S_3, S_4 , étant les centres tous distincts des inversions, S_1S_4 de vecteur unitaire w est la perpendiculaire commune aux droites S_1S_2 de vecteur unitaire u et S_3S_4 de vecteur unitaire v . On pose $S_1S_4 = aw$, $S_1S_2 = au$, $S_4S_3 = av$ et l'on suppose $u \cdot v = 0$.

On choisit l'origine en S_1 et l'on note $M(x)$, $M'(X)$, $M''(Y)$, $M'''(Z)$, les inverses successifs, les puissances étant strictement positives et égales à k , l'espace E_n ayant un nombre de dimensions supérieur ou égal à 3.

9.1 Equation aux Points Invariants

On écrit les inversions dans l'algèbre de Clifford

$$Xx = k, \tag{9.1}$$

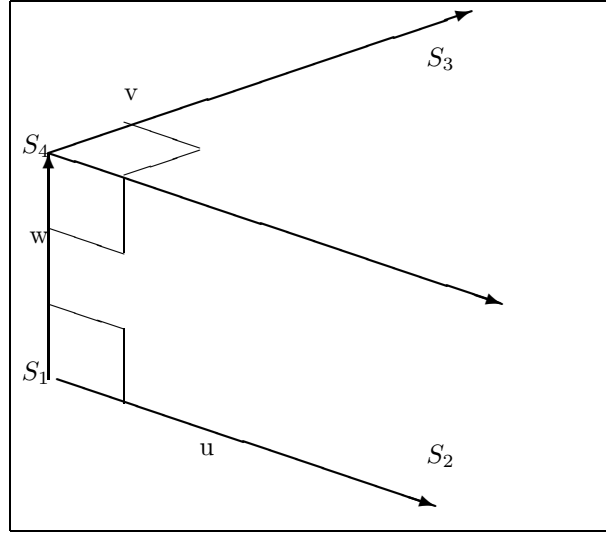


Figure 2

$$(Y - au)(X - au) = k, \quad (9.2)$$

$$(Y - aw - av)(Z - aw - av) = k, \quad (9.3)$$

$$(Z - aw)(x - aw) = k. \quad (9.4)$$

De (9.2) et (9.1) on déduit

$$Y = au + k(kx^{-1} - au)^{-1}. \quad (9.5)$$

De (9.4) on déduit

$$Z = aw + k(x - aw)^{-1} \quad (9.6)$$

En portant (9.5) et (9.6) dans (9.3) on obtient l'équation aux points invariants

$$[a(u - v - w) + k(kx^{-1} - au)^{-1}] [k(x - aw)^{-1} - av] = k, \quad (9.7)$$

que l'on rend entière en multipliant par $x - aw$ à droite et par $kx^{-1} - au$ à gauche, soit

$$[(kx^{-1} - au)a(u - v - w) + k][k - av(x - aw)] = k(kx^{-1} - au)(x - aw),$$

et en multipliant par x à gauche

$$\left[a(k - axu)(u - v - w) + kx \right] [k - av(x - aw)] = k(k - axu)(x - aw).$$

Développons

$$(kx + kau - kav - kaw - a^2x + a^2xuv + a^2xuw)(k - avx + a^2vw) = \\ k^2x - akxux - ak^2w + a^2kxuw$$

Posons $x = pu + qv + rw + ts$, t étant un vecteur quelconque du sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace u, v, w . Alors

$$p = u \cdot x, \quad q = v \cdot x, \quad r = w \cdot x, \quad s = t \cdot x$$

p, q, r, s étant réels et t^2 étant égal à 1.

Réduisons l'équation précédente

$$k^2au - k^2av + ka^2pv - ka^2qu + ka^2x \wedge u \wedge v + \\ a(a^2 - k)(xvx - xux) + a^3xuvw \\ - ka^2uvx + ka^2wvx + ka^2xvw + a^3kuvw - \\ a^3kw + ka^3v - a^4xvw + a^4xuw - a^4xuv = 0. \quad (9.9)$$

Développons $xuvw$ en remarquant que $xuvw = V + T$, V étant un vecteur et T un trivecteur, combinaison linéaire de trivecteurs. Comme

$$\widetilde{xuvw} = -xuvw = V - T = -V - T, \text{ il faut } V = 0.$$

Développons T , soit

$$2stuvw(pu + qv + rw) + puuvwup + quvwqv + ruvwrv + stuvwts,$$

d'où

$$\frac{uvw}{p^2} + q^2 r^2 - s^2$$

$$\frac{tuv}{2rs}$$

$$\frac{tuw}{-2qs}$$

$$\frac{tvw}{2ps}$$

9.2 Discussion

1° Nous supposons s différent de zéro et donc $n > 3$. Nous écrivons que la partie trivectorielle de (9.9) est nulle, soit $uvw/$ on obtient tous calculs faits

$$p^2 + q^2 + r^2 - ap - bq - ar = s^2 - k, \quad (9.10)$$

$$\frac{tuv}{2rsa^3} - a^4 s = 0 \quad 2r - a \implies r = \frac{a}{2}, \quad (9.11)$$

$$\frac{tuw}{-2a^3 qs} + a^4 s = 0 = -2q + a \implies q = \frac{a}{2}, \quad (9.12)$$

$$\frac{tvw}{+2a^3 ps} - a^4 s = 0 \quad 2p - a \implies p = \frac{a}{2}. \quad (9.13)$$

En substituant dans (9.10) on obtient

$$s^2 = k - \frac{3a^2}{4}, \quad (9.14)$$

ce qui exige, s^2 étant positif, $k > 3a^2/4$.

Calculons $x^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ en tenant compte des résultats précédents, ce qui permet d'écrire

$$x^2 = \frac{3a^2}{4} + s^2 = k. \quad (9.15)$$

Récrivons la partie vectorielle de (9.9) en tenant compte des résultats précédents

$$\begin{aligned} k^2 au - k^2 av + \frac{ka^3}{2}v - \frac{ka^3}{2}u - ak(a^2 - k)(v - u) - \frac{ka^3}{2}(u - v) \\ + \frac{ka^3}{2}(w - v) + \frac{ka^3}{2}(w - v) + a^3k(v - w) - \frac{a^5}{2}(w - v) \\ + \frac{a^5}{2}(w - u) - \frac{a^5}{2}(v - u) = 0, \end{aligned}$$

qui est identiquement nulle.

Conclusion.

Soit I le point $(a/2, a/2, a/2)$ dans le sous-espace vectoriel (u, v, w) . Si $n = 4$, t a une direction bien déterminée et (9.14) prouve qu'ils existent deux points invariants si $k > 3a^2/4$ à l'intersection de la sphère $x^2 = k$ et de la droite parallèle à t et passant par I .

Si $n = 5$, les points invariants sont à l'intersection de la sphère $x^2 = k$ et d'un plan passant par I .

Si $n \geq 6$, les points invariants sont sur une sphère centrée en I et de rayon $\sqrt{k - 3a^2/4}$

2° Si $k = 3a^2/4$, alors $s = 0$ d'après (9.14). On remarque que (9.10) devient $(p - a/2)^2 + (q - a/2)^2 + (r - a/2)^2 = 0$, ce qui exige dans le domaine réel $p = q = r = a/2$, si bien que I est alors le seul point invariant. Il est équidistant des quatre centres et commun aux quatre sphères d'inversion. Dans ce cas n est supérieur ou égal à 3.

3° Si $k < 3a^2/4$ et si $n \geq 3$, la condition $s = 0$ implique que les points invariants recherchés sont dans l'espace (u, v, w) . On pose

$a = 2b$, $p = b + P$, $q = b + Q$, $r = b + R$, $P + Q = 2y$, $P - Q = 2z$
et enfin $3b^2 - k = c^2 \neq 0$. Alors l'équation (9.9) est de la forme

$$Au + Bv + Cw + Duvw = 0,$$

ce qui implique

$$A = B = C = D = 0, \quad (9.16)$$

$A = 0$ implique, tous calculs faits

$$bkR = c^2(c^2 + b^2) - 2(b^2 + c^2)z(y + z) + 4bc^2(y - z), \quad (9.17)$$

$B = 0$ implique

$$bkR = -c^2(b^2 + c^2) - 2(b^2 + c^2)z(y - z) - 4bc^2(y + z), \quad (9.18)$$

$C = 0$ implique

$$Rz(b^2 + c^2) = bky, \quad (9.19)$$

$D = 0$ implique

$$y^2 + z^2 + 2R^2 = 2c^2. \quad (9.20)$$

Nous remplaçons (9.17) et (9.18) par les équations obtenues en les additionnant et en les retranchant membre à membre, soit

$$bkR = -2(b^2 + c^2)yz - 4bc^2z, \quad (9.21)$$

$$0 = c^2(b^2 + c^2) - 2z^2(b^2 + c^2) + 4bc^2y. \quad (9.22)$$

Si l'on permute u et v dans (9.2) et (9.3) et dans toute la suite on ne change pas les conditions d'annulation (9.16) si bien que si (p_0, q_0, z_0) est une solution du système (9.19), (9.20), (9.21), (9.22) de quatre équations à trois inconnues, (q_0, p_0, r_0) est aussi une solution, ce qui revient à dire que si (y_0, z_0, R_0) est une solution, $(y_0, -z_0, R_0)$ est aussi une solution. D'après (9.19) on peut écrire

$$\begin{aligned} R_0 z_0 (b^2 + c^2) &= bky_0, \\ -R_0 z_0 (b^2 + c^2) &= bky_0. \end{aligned}$$

En additionnant on obtient $y_0 = 0$ et donc $R_0 z_0 = 0$.

Si $R_0 = 0$ il résulte de (9.21) que $z_0 = 0$ mais $y_0 = z_0 = R_0 = 0$ est impossible d'après (9.22) comme d'après (9.20) puisque c est supposé différent de zéro. Quant à $z_0 = 0$ c'est impossible d'après (9.22).

Conclusion.

Il n'y a pas de point invariant dans l'espace (u, v, w) si $k < 3a^2/4$.

9.2.1 Remarque

Pour étudier le produit de quatre inversions nous avons choisi un cas particulier afin de simplifier les calculs encore abordables dans un cas plus général mais pour le produit de cinq inversions les calculs deviendraient très nettement prohibitifs dans le cas général.

10

INVERSION HYPERBOLIQUE PLANE

Si M a pour affixe le complexe z , M' pour affixe z' , la transformation $z' = k/\bar{z}$ où \bar{z} es le conjugué de z , représente une inversion plane de centre l'origine O et de puissance k . Par analogie si u est le nombre hyperbolique, $x + \varepsilon y$ où $\varepsilon^2 = 1$, carré d'un nombre de Clifford $CL(p, q)$ et si $v = x' + \varepsilon y'$, $\bar{v} = x' - \varepsilon y'$ la transformation $\bar{v} u = k$ représente une inversion que nous appellerons hyperbolique. Multiplions par $\bar{u} = x - \varepsilon y$, conjugué de u

$$\bar{u}u\bar{v} = k\bar{u} \quad (k \text{ scalaire et } u\bar{u} \neq 0).$$

Comme $u\bar{u} \neq 0$ est scalaire \bar{v} est proportionnel à \bar{u} donc v à u si bien que les points O, M et M' sont alignés. De plus $v\bar{u} = k$ et il en résulte que M est l'homologue de M' . La transformation est réciproque.

Remarque. Si $u\bar{u} = 0$ la transformation n'est pas définie comme on le voit sur les équations cartésiennes de l'inversion hyperbolique

$$x' = \frac{kx}{(x^2 - y^2)}, \quad y' = \frac{ky}{(x^2 - y^2)},$$

car $y'/x' = y/x$ et donc x' et y' sont à l'infini sur les bissectrices.

Points Invariants

Si $u = v$ alors $u\bar{u} = x^2 - y^2 = k$. C'est l'équation d'une hyperbole équilatère (H) centrée à l'origine et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des axes. Ces hyperboles dont le centre est quelconque jouent le même rôle que les cercles d'inversion pour l'inversion plane, mais la définition suppose ici un choix des axes. L'axe \vec{Ox} est appelé axe de l'inversion. Ainsi nous énonçons le théorème

Si $OM_0(u_0)$ et $OM'_0(u'_0)$ ne sont pas alignés, leurs inverses $P_0(v_0)$ et $P'_0(v'_0)$ dans une inversion convenable sont situés sur une hyperbole équilatère dont un quadrant des asymptotes contient OM_0 et OM'_0 , l'axe \vec{Ox} de l'inversion étant la bissectrice intérieure du quadrant.

Démonstration

- 1° OM_0 et OM'_0 sont orthogonaux. Dans toute inversion hyperbolique les inverses P_0 et P'_0 sont situés sur les droites OM_0 et OM'_0 qui forment une hyperbole équilatère dégénérée, et le théorème est démontré.
- 2° Les droites OM_0 et OM'_0 forment nécessairement deux angles aigus opposés situés d'une infinité de façons dans deux quadrants opposés. On choisit arbitrairement deux quadrants opposés contenant les droites OM_0 et OM'_0 et pour axe de l'inversion sa bissectrice intérieure. Ce sont ces inversions hyperboliques que nous avons appelées convenables.

Soit $(u - a)(\bar{u} - \bar{a}) = K$ l'hyperbole cherchée de centre a .

Ecrivons qu'elle contient u_0 et u'_0 , soit

$$(u_0 - a)(\bar{u}_0 - \bar{a}) = K \quad \text{et} \quad (u'_0 - a)(\bar{u}'_0 - \bar{a}) = K.$$

Ecrivons qu'elle contient P_0 et P'_0 inverse dans $\bar{v}u = k$ (positif)

$$(K - a\bar{a})v_0\bar{v}_0 + \bar{a}v_0k + a\bar{v}_0k - k^2 = 0,$$

et de même pour v'_0 au lieu de v_0 . Si $K \neq a\bar{a}$ on récrit

$$\left(v_0 + \frac{ak}{K - a\bar{a}}\right)\left(\bar{v}_0 + \frac{\bar{a}k}{K - a\bar{a}}\right) - \frac{k^2K}{(K - a\bar{a})^2} = 0.$$

Si $-a = ak/K - a\bar{a}$ et si $K = k^2K/(K - a\bar{a})^2$, P_0 et P'_0 sont sur l'hyperbole.

3° Si $a = 0$ et si $K^2 = k^2$ cela suffit et on a $K \neq a\bar{a} = 0$.

4° Si $a \neq 0$, la condition $k = -K + a\bar{a}$ ($\neq 0$) suffit, si bien qu'il reste

$$(u_0 - a)(\bar{u}_0 - \bar{a}) = a\bar{a} - k,$$

$$(u'_0 - a)(\bar{u}'_0 - \bar{a}) = a\bar{a} - k,$$

qui se développe suivant

$$u_0\bar{u}_0 - a\bar{u}_0 - \bar{a}u_0 + k = 0,$$

$$u'_0\bar{u}'_0 - a\bar{u}'_0 - \bar{a}u'_0 + k = 0,$$

où l'inconnue est a ($u'_0 \neq \lambda u_0$ et λ réel) ce qui représente deux droites concourantes se coupant en a unique

$$a = \frac{[u_0u'_0(\bar{u}_0 - \bar{u}'_0) + k(u'_0 - u_0)]}{(\bar{u}_0u'_0 - u_0\bar{u}'_0)}.$$

Inverse d'une Droite.

Soit une droite (D) $Au + \bar{A}\bar{u} = C$ où $A \in (x + \varepsilon y)$ et où C est réel. Son inverse est $kA/\bar{v} + \bar{A}k/v = C$ ce qui se récrit

$$k(Av + \bar{A}\bar{v}) = Cv\bar{v}$$

1° $C = 0$ alors la droite passe par le pôle d'inversion et est invariante.

2° $C \neq 0$ l'inverse est une hyperbole équilatère passant par le pôle d'inversion où la tangente est parallèle à la droite (D) .

Le centre ω de l'hyperbole est donné par $\bar{A}k/2C$ si bien que la droite $O\omega$ joignant le pôle et le centre ω et la droite (D) ont les mêmes directions de bissectrices que les axes de coordonnées.

Inverse d'un Cercle.

Soit l'équation d'un cercle quelconque de centre a de rayon R

$$(u - a)^2 + (\bar{u} - \bar{a})^2 = 2R^2.$$

Son inverse a pour équation, v étant un point courant

$$v^2\bar{v}^2(2R^2 - a^2 - \bar{a}^2) + 2kv\bar{v}(av + \bar{a}\bar{v}) - k^2(v^2 + \bar{v}^2) = 0.$$

1° $2R^2 = a^2 + \bar{a}^2$, le cercle passe par le pôle de l'inversion.

L'inverse est une cubique ayant trois asymptotes réelles dont deux parallèles aux bissectrices des axes et un point double au pôle ayant des tangentes isotropes.

2° $2R^2 = a^2 + \bar{a}^2$. L'inverse est une quartique ayant deux asymptotes parallèles aux bissectrices des axes et un point double avec des tangentes isotropes.

10.1 Inverse d'une Hyperbole Équilatère

L'hyperbole a ses asymptotes parallèles aux bissectrices des axes. Son équation s'écrit si a est son centre

$$(u - a)(\bar{u} - \bar{a}) = k',$$

et son inverse dans l'inversion de pôle O

$$v\bar{v}(k' - a\bar{a}) + k(av + \bar{a}v) = k^2.$$

1° $a\bar{a} = k'$ l'hyperbole passe par O et son inverse est droite

$$a\bar{v} + \bar{a}v = k.$$

2° $a\bar{a}-k' \neq 0$ l'inverse est une hyperbole homothétique dans l'homothétie de centre O et de rapport $k/(k' - a\bar{a})$.

Anallagmatie Hyperbolique

Une courbe est anallagmatique hyperboliquement si elle est invariante dans une inversion hyperbolique.

Soit une cubique

$$P_3(x, y) + P_2(x, y) + ax + by + c = 0 \quad (10.1)$$

$(a, b, c \text{ réels}),$

où P_3 et P_2 sont des polynômes homogènes de degré 3 et 2.

Dans l'inversion hyperbolique (O, k) d'axe Ox cette courbe devient

$$k^3 P_3(x', y') + k^2(x'^2 - y'^2)P_2(x', y') + \quad (10.2)$$

$$k(x'^2 - y'^2)^2(ax' + by') + c(x'^2 - y'^2)^3 = 0$$

La cubique sera invariante si $c = 0$ (condition nécessaire). Pour que (10.2) soit une cubique non dégénérée il est également nécessaire que $x'^2 - y'^2$ soit en facteur dans le terme de plus haut degré et cette condition jointe à $c = 0$ est alors suffisante si

$$k^2(a'x' + b'y') + kP_2(x', y') + (x'^2 - y'^2)(ax' + by') = 0,$$

$(a'$ et b' réels) représente la même cubique que (10.1), soit si

$$k^2 \frac{a'}{a} = k^2 \frac{b'}{b} = k,$$

ce qui suppose que $ax' + by' = 0$ et $a'x' + b'y' = 0$ représentent la même droite c'est-à-dire que la tangente à la cubique au pôle d'inversion soit parallèle à l'asymptote non parallèle aux bissectrices des axes. L'équation de la cubique s'écrit donc sous la forme (10.1bis)

$$(x^2 - y^2)(ax + by) + P_2(x, y) + k(ax + by) = 0. \quad (10.1bis)$$

L'analogie entre l'inversion ordinaire et l'inversion hyperbolique est évidente.

10.2 Produit de Deux Inversions Hyperboliques

1° Les inversions ont même centre et mêmes axes.

Si M a pour inverse M' et M' pour inverse $M''(w)$ alors

$$\bar{v}u = k, \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}w &= k' \\ (k' \text{ positif, } w &= x'' + \varepsilon y'') \end{aligned} \quad (10.4)$$

d'où

$$\bar{v}uw = kw = \bar{v}, \quad wu = k'u, \quad (10.5)$$

car l'anneau des nombres hyperboliques est commutatif et il résulte de (10.5)

$$w = \frac{k'}{k}u.$$

Le produit est une homothétie de centre O et de rapport k'/k .

2° Axe Radical de Deux Hyperboles Equilatères de Même Axe Ox .

Soit l'hyperbole $u\bar{u} - k = 0$ et l'hyperbole

$$(u - a)(\bar{u} - a) - k' = 0 \quad (a \text{ réel } h' \text{ positif}).$$

Les premiers membres sont les puissances analytiques d'un point (x, y) par rapport à l'hyperbole. L'axe radical est l'ensemble des points de même puissance pour les deux hyperboles, soit

$$-a(u + \bar{u}) + a^2 + k - k' = 0.$$

Comme $u + \bar{u} = 2x$, l'axe est la droite

$$x = \frac{(a^2 + k - k')}{2a} = b. \quad (10.6)$$

C'est le même résultat que pour deux cercles d'inversion.

3° Hyperboles Dégénérées du Faisceau.

Soit l'équation d'une hyperbole du faisceau

$$m(u\bar{u} - k) + u\bar{u} - a(u + \bar{u}) + a^2 - k' = 0 \quad (m \text{ étant un paramètre}).$$

ce qui se réécrit

$$(1 + m)(x^2 - y^2) - 2ax + a^2 - k' - mk = 0.$$

Le centre (x_0, y_0) est $x_0 = a/(1 + m)$, $y_0 = 0$.

Il sera sur l'hyperbole si

$$x_0^2 - 2bx_0 + k = 0.$$

C'est l'équation des points de Poncelet dans le cas de l'inversion. Ici ces points sont les centres de deux droites parallèles aux bissectrices des axes qui représentent une hyperbole dégénérée.

4° Produit de Deux Inversions Hyperboliques Ayant Mêmes Axes.

Ces sont les inversions

$$\begin{cases} \bar{v}u = k \\ (w - a)(\bar{v} - a) = k' \end{cases}$$

En éliminant \bar{v}

$$(w - a)(k - au) = k'u.$$

Soit u' le symétrique de u par rapport à l'axe radical. Alors

$$\bar{u}' + u = 2b.$$

ce qui permet d'écrire

$$(w - a)[k - a(2b - \bar{u}')] = k'(2b - \bar{u}'),$$

ce qui se réécrit

$$w\bar{u}' + \frac{(\bar{u}' + w)(k' - a^2)}{a} + \frac{2b(a^2 - k')}{a} - k = 0,$$

et l'on identifie avec l'inversion

$$(w - c)(\bar{u}' - c) = k'' \quad (c, k'' \text{ réels}) \quad \text{d'où}$$

$$c = \frac{(a^2 - k')}{a}, \quad c^2 - k'' = \frac{2b(a^2 - k')}{a} - k$$

ce qui conduit à

$$k'' = \frac{kk'}{a^2}. \quad (10.7)$$

Le produit de deux inversions hyperboliques ayant mêmes axes est le produit d'une symétrie par rapport à l'axe radical des hyperboles suivie d'une inversion hyperbolique dont l'hyperbole d'inversion appartient au faisceau et dont la puissance est le produit des puissances d'inversion divisé par le carré de la distance des centres.

Points Invariants Réels dans le Produit.

On écrit $\bar{v}u = k$ et $(u - a)(\bar{v} - a) = k'$ et en éliminant \bar{v} on obtient l'équation $u^2 - 2bu + k = 0$.

Si $b^2 > k$ il y a quatre points réels ($y = 0$, $x = b \pm \sqrt{b^2 - k}$) et ($x = b$, $y = \pm\sqrt{b^2 - k}$).

Il y a quatre points invariants, les deux points de Poncelet sur l'axe des x et les deux points de l'axe radical sur les hyperboles.

Si $b^2 < k$ tous ces points sont imaginaires.

Produit de Trois Inversions Centrées Sur un Axe d'Inversion.

1° Les hyperboles d'inversion appartiennent au même faisceau. Soit $H_1H_2H_3$ le produit. Or $H_1H_2 = DH$, D représentant la symétrie par rapport à l'axe radical du faisceau et $HH_3 = DH'$, (H et H' hyperboles)

$$H_1H_2H_3 = D^2H' = H'.$$

Le produit équivaut à une inversion unique.

Il y a un cas d'exception, c'est celui où le centre de H coïncide avec le centre de H_3 . Mais alors H_3 et H appartenant au même faisceau et ayant même centre sont identiques, d'où $H^2 = 1$ et

$$H_1H_2H_3 = D.$$

Le produit se réduit à une symétrie. Si s est l'abscisse du centre de H_3 la condition s'écrit $as = a^2 - k'$.

2° Les hyperboles d'inversion ne font pas partie du même faisceau.

$$H_1H_2 = DH \text{ et } HH_3 = D'H'$$

$$H_1H_2H_3 = DD'H'$$

mais DD' est une translation t parallèle à la ligne des centres. Les points invariants sont obtenus en écrivant

$$(t + u)\bar{u} = k_1,$$

en prenant l'origine au centre de H' et k_1 étant la puissance d'inversion positive de H' , d'où

$$u\bar{u} + t\bar{u} - k_1 = 0.$$

Comme $\bar{u} = x - \varepsilon y$ ceci exige $y = 0$ et donc

$$x^2 + tx - k_1 = 0,$$

qui admet toujours deux racines réelles.

Ce sont les points invariants.

Inversions Hyperboliques Commutantes

Lorsque deux cercles sont orthogonaux la condition d'orthogonalité peut s'interpréter en remarquant qu'elle signifie que la somme des puissances analytiques d'un centre par rapport aux deux cercles d'inversion est nulle. Ceci peut s'appliquer aux inversions hyperboliques de mêmes axes lorsque les cercles d'inversion sont remplacés par des hyperboles équilatères. On obtient la même condition

$$a^2 = k_1 + k_2. \tag{10.8}$$

Dans ce cas les deux inversions circulaires commutent. Nous montrons que, de la même façon, deux inversions hyperboliques de mêmes axes commutent si et seulement si la condition (10.8) est satisfaite.

Si $M(u)$ est transformé en $M(w)$ dans le produit H_1H_2

$$\begin{cases} \bar{v}u = k_1 \\ (\bar{v} - a)(w - a) = k_2 \end{cases}$$

En éliminant \bar{v} on obtient

$$(k_1 - au)(w - a) = k_2u,$$

qui se réécrit

$$-auw + (a^2 - k_2)u + k_1w = ak_1. \quad (10.9)$$

Dans le produit H_2H_1

$$\begin{cases} (u - a)(\bar{v} - a) = k_2 \\ \bar{v}w = k_1 \end{cases}$$

d'où $(u - a)(k_1 - aw) = k_2w$ qui se réécrit

$$-auw + k_1u + (a^2 - k_2)w = ak_1. \quad (10.10)$$

En identifiant (10.9) et (10.10) on obtient la condition nécessaire et suffisante $k_1 = a^2 - k_2$; c'est-à-dire (10.8).

10.3 Famille de Courbes Isogonales

Soit C_1 et C_2 les deux familles de courbes. Une courbe de C_1 rencontre une courbe de C_2 en un point M . Les deux familles sont dites isogonales si leurs tangentes en M ont mêmes bissectrices que les axes.

Soit $F(u, \bar{u}, du/d\bar{u}) = 0$ l'équation différentielle de la famille C_1 . Or

$$\frac{du}{d\bar{u}} = \frac{(dx + \varepsilon dy)}{(dx - \varepsilon dy)} = \frac{(1 + \varepsilon y'_x)}{(1 - \varepsilon y'_x)}.$$

Le changement de y'_x en $1/y'_x$ (isogonalité) transforme $du/d\bar{v}$ en $-du/d\bar{v}$.

Il s'ensuit que les isogonales de

$$u^n + \bar{u}^n = \lambda,$$

sont les courbes

$$u^n + \bar{u}^n = \varepsilon\mu \quad (n \text{ entier, } \lambda, \mu \text{ réels}).$$

Ainsi les cercles $x^2 + y^2 = a$ centrés à l'origine et de rayon arbitraire sont isogonaux des hyperboles équilatères $xy = b$ (b réel).

Plus généralement si $f(u)$ est une fonction analytique hyperbolique

$$f(u) = \frac{[f(x+y) + f(x-y)]}{2} + \varepsilon \frac{[f(x+y) - f(x-y)]}{2}, \quad (10.11)$$

les familles de courbes

$$f(x+y) + f(x-y) = \lambda$$

$$f(x+y) - f(x-y) = \mu \quad (\lambda, \mu \text{ réels})$$

sont isogonales.

Par dérivation la vérification est immédiate.

Transformations Isogonales.

On peut énoncer mais sous une forme à préciser.

L'Inversion Hyperbolique est une Transformation Isogonale.

Soit deux courbes planes C_1 et C_2 se coupant en $M(x, y)$. On choisit des axes tels que leurs bissectrices soient les mêmes que celles des tangentes en M à C_1 et à C_2 puis on prend l'origine au pôle d'inversion. Les inverses de C_1 et de C_2 ont alors les bissectrices des axes comme bissectrices de leurs tangentes en M' inverse de M . En effet soit l'inversion (O, k) qui s'écrit en cartésiennes

$$X = \frac{kx}{(x^2 - y^2)} \quad , \quad Y = \frac{ky}{(x^2 - y^2)} \quad \text{avec} \quad M'(x, y),$$

d'où

$$Y'_X = \frac{[y'_x(x^2 + y^2) - 2xy]}{[2xy y'_x - (x^2 + y^2)]}.$$

Le changement de y'_x en $1/y'_x$ change Y'_X en $1/Y'_X$ ce qui démontre la proposition.

Corollaire.

La transformation

$$v = \frac{(au + b)}{(cu + d)}.$$

(a, b, c, d réels) est isogonale.

Il suffit de le prouver pour $v = 1/u$ produit d'une inversion et d'une symétrie par rapport à Ox , toutes deux isogonales.

Distances. Etant donnés deux points $M(u)$ et $M'(u')$, des axes ayant été choisis, la quantité

$$(u - u')(\bar{u} - \bar{u}') = (x - x')^2 - (y - y')^2 = MM'^2, \quad (10.12)$$

est invariante dans une translation des axes.

Si MM'^2 est positif, on pose $\sqrt{MM'^2} = d(M, M') = d(M', M)$

Si MM'^2 est négatif, on pose $\sqrt{-MM'^2} = d(M, M') = d(M', M)$

Si $MM'^2 = 0$, MM' est parallèle à une bissectrice des axes.

Distances Inverses. Si M et M' ont pour inverses respectifs $P(v)$ et $P'(v')$ dans l'inversion (O, k)

$$PP'^2 = k^2 \frac{MM'^2}{OM^2 OM'^2}.$$

En effet $\bar{v} = k/u$ et

$$(v - v')(\bar{v} - \bar{v}') = \frac{k^2(\bar{u}' - \bar{u})(u' - u)}{uu'\bar{u}\bar{u}'},$$

que l'on récrit sous la forme

$$d(P, P') = k \frac{d(M, M')}{d(O, M)d(O, M')}, \quad (10.13)$$

à condition que $d(O, M)$ et $d(O, M')$ soient différents de zéro, c'est-à-dire que M et M' ne soient pas sur une bissectrice des axes.

Remarque. La distance ainsi définie n'est pas une distance au sens habituel. En effet si $M(x, 0)$ et x positif et si $M'(x/2, h)$ avec $0 < h < x/2$, l'inégalité triangulaire

$$d(O, M) < d(O, M') + d(M', M),$$

n'est pas vérifiée mais si B, C, D sont trois points alignés, alors

$$d(B, D) = d(B, C) + d(C, D),$$

si C est entre B et D .

En effet si $y = mx + p$ (m, p réels) $y_B - y_C = m(x_B - x_C)$ donc

$$(x_B - x_C)^2 - (y_B - y_C)^2 = (1 - m^2)(x_B - x_C)^2,$$

d'où le résultat et ceci nous permet de démontrer l'homologue du théorème de Ptolémée pour un quadrilatère inscrit dans un cercle.

10.4 Quadrilatère Inscrit Dans Une Hyperbole Équilatère

Si un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans une hyperbole équilatère en appliquant (10.13) on obtient en remarquant que dans l'inversion de pôle A l'inverse de l'hyperbole est une droite

$$d(B, D)d(A, C) = d(C, B)d(A, D) + d(D, C)d(A, B),$$

aucune de ces distances n'étant nulle et l'inverse C' de C étant entre B' et D' inverses de B et D .

Exemple

Soit l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ et les points

$$A(-\sqrt{2}, 1), B(\sqrt{3}, \sqrt{2}), C(\sqrt{3}, -\sqrt{2}), D(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

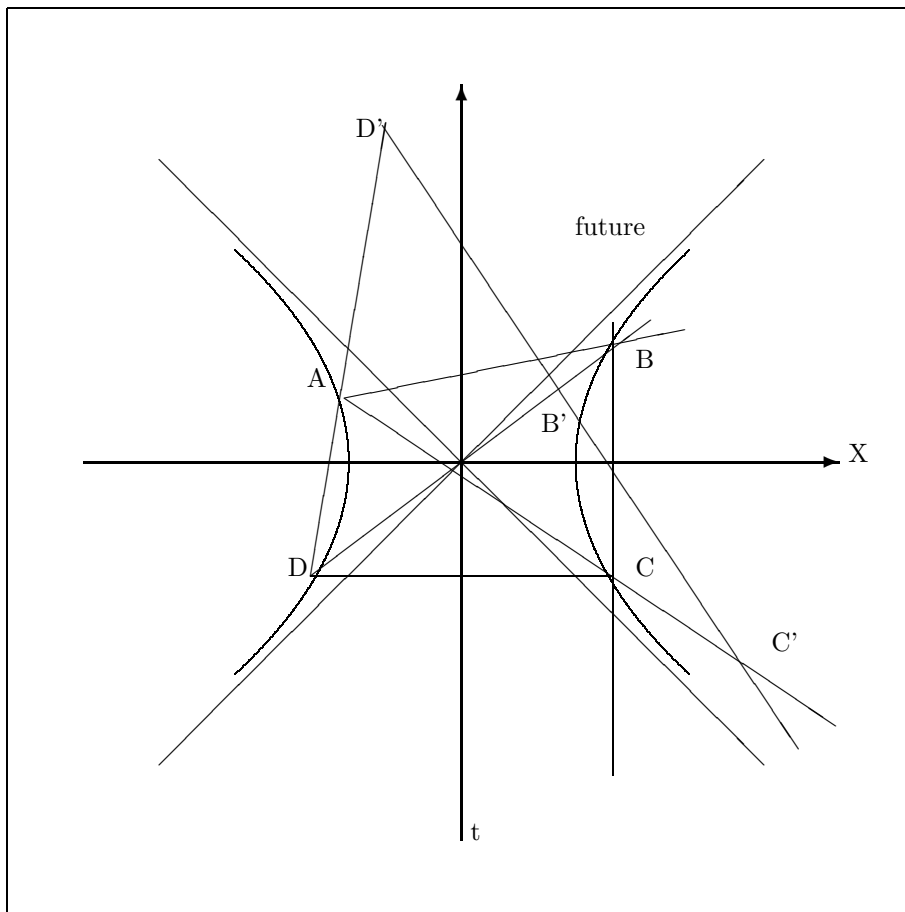


Figure 3

De $C'B' + B'D' = C'D'$ on déduit

$$\begin{aligned}
 d(B, C)d(A, D) + d(A, C)d(B, D) &= d(C, D)d(A, B), \\
 \sqrt{8}\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + 2\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (1 + \sqrt{2})^2} \\
 &= \sqrt{12}\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (1 - \sqrt{2})^2},
 \end{aligned}$$

qui se vérifie par deux élévations au carré.

10.4.1 Quaternion Réels

On pose (Hamilton) $q = q_0 + xI + yJ + zK$ avec

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J$$

Dans $R(3, 0)$ $i'_3 = -i_3 = -e_1e_2e_3$. En posant

$$I = i'_3e_1, \quad J = i'_3e_2, \quad K = i'_3e_3,$$

tous les axiomes pour I, J, K sont vérifiés. On écrit

$$q = q_0 + i'_3(xe_1 + ye_2 + ze_3) = q_0 + i'_3 ar,$$

r étant un vecteur unitaire et a sa valeur absolue.

Posons $q_c = q_0 - i'_3ar$, d'où $qq_c = q_0^2 + a^2 = \rho^2$ (ρ réel)

D'où

$$q = \rho(\cos \theta + i'_3r \sin \theta), \quad q^n = \rho^n(\cos n\theta + i'_3r \sin n\theta)q^{-1} = \frac{q_c}{qq_c}.$$

Il existe un inverse pour tout q non nul.

Soit

$$q' = q'_0 + i'_3a' r'.$$

Formons

$$\begin{aligned}
 qq' &= q_0q'_0 - aa'rr' + i'_3(q_0a'r' + q'_0ar) \\
 &= q_0q'_0 - aa'r.r' + i'_3[q_0a'r' + q'_0ar + aa'(r \times r')]
 \end{aligned}$$

car

$$rr' = r \cdot r' + r \wedge r' \quad \text{et} \quad r \wedge r' = i_3(r \times r') = -(r \times r')i'_3.$$

Il s'ensuit que qq' est un quaternion, donc les quaternions forment un corps non commutatif.

Rotations. Dans $R(3, 0)$ c'est le produit de deux symétries par rapporte à deux plans

$$x' = vu \times uv.$$

ce qui s'écrit encore $x' = q^{-1} \times q$, le produit uv étant un quaternion q et $vu = (uv)^{-1}$. L'angle de la rotation est le double de l'angle de u et de v et l'axe de la rotation est $u \times v$.

Puisque le produit de deux quaternions n'est pas commutatif le produit de deux rotations ne le sera pas non plus, mais ce sera encore une rotation. Pour obtenir les éléments de la rotation produit il faut identifier $\exp i'_3 u\omega$ avec

$$(\exp i'_3 r\theta)(\exp i'_3 r'\varphi), \text{ d'où}$$

$$\cos \omega = \cos \theta \cos \varphi - r \cdot r' \sin \theta \sin \varphi$$

$$u \sin \omega = r \sin \theta \cos \varphi + r' \cos \theta \sin \varphi + (r \times r') \sin \theta \sin \varphi$$

Les quaternions réels sont la partie paire de $CL(3, 0)$.

Quaternions Complexes

On pose avec P. Girard [5]

$$q = ct + i'xI + i'yJ + i'zK,$$

c vitesse de la lumière et t le temps, i' étant l'imaginaire usuelle,

$$q_c = ct - i' xI - i'yJ - i'zK,$$

$$qq_c = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 q^{-1} = \frac{q_c}{qq_c}.$$

Il faut poser qq_c positif, ce qui limite le champ d'application de l'inverse au cône passé-futur où se déroulent tous les évènements de la physique, à l'exception de la lumière dans le vide.

D'autre il apparaît dans le produit qq_c des éléments tels que $i'Ii'I$ ce qui suppose que i' commute avec les symboles d'Hamilton et l'on ne pourra remplacer i' que par i_3 qui commute avec tous les vecteurs de $R(3, 0)$. Or

$$i_3I = i_3i_3'e_1 = e_1.$$

si bien que

$$q = ct + (xe_1 + ye_2 + ze_3) = ct + ar \quad (r^2 = 1)$$

$$qq_c = c^2t^2 - a^2 = \rho^2 \quad (\rho, \text{ réel})$$

et que

$$q = \rho(ch \theta + r sh \theta) = \rho \exp r\theta$$

$$q^n = \rho^n(ch \ n\theta + r sh \ n\theta)$$

$$q_c = \rho \exp -r\theta$$

La transformation $q' = (\exp r\theta)q$ où l'on pose $th \theta = -v/c$ est une transformation simple de Lorentz où v est la vitesse relative des repères. Elles forment un groupe pour r fixé. Les quaternions complexes sont par partie stable de $CL(3, 0)$.

11

INVERSE D'UN NOMBRE DE CLIFFORD

Si A est un nombre de Clifford différent de zéro et de carré non nul il existe un inverse à droite $A^{-1} = A/A^2$ et un inverse à gauche $A^{-1} = 1/A^2A$, à condition que les inverses ainsi définis soient des nombres de Clifford.

Ce résultat est surtout intéressant sous sa forme négative: si $A^2 = 0$ et si A est différent de zéro, il ne peut y avoir d'inverse. Soit $\varepsilon(\varepsilon^2 = 1)$ ou $i(i^2 = -1)$ le produit de r vecteurs d'une base canonique de $R(p, q)$ avec $r \leq n = p + q$. Si $A^2 = \alpha + \varepsilon\beta$ ou $\alpha + i\beta$ (α, β , réels) l'inverse est bien défini. Ainsi en posant $A^2 = \alpha + \varepsilon\beta$ et $\alpha^2 \neq \beta^2$

$$\frac{A^{-1} = A}{(\alpha + \varepsilon\beta)} = \frac{A(\alpha - \varepsilon\beta)}{(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Si le produit des r -vecteurs de la base commute avec A , l'inverse à droite coïncide avec l'inverse à gauche.

Ce sera toujours le cas d'un vecteur dont le carré est un scalaire mais ce peut aussi être le cas d'un bivecteur comme dans $R(1, 3)$ ou d'un pseudo-scalaire $\varepsilon = \varepsilon^{-1}, i^{-1} = -i, \varepsilon, i \in CL(p, q)$.

Nous appelons I_n le sous-ensemble de $CL(p, q)$ ($p + q = n$) tel que $A^2 = \alpha + i\beta$ et $I(N)$ l'ensemble des I_n pour $n \leq N$ entier positif. De même nous appelons I'_n et $I'(N)$ les ensembles respectifs pour $A^2 = \alpha + \varepsilon\beta$.

Théorème Général.

Si A et B sont deux nombres de Clifford différents de zéro et appartenant à $I(N)$ ou à $I'(N)$, alors $A^2 = 0$ et $B^2 = 0$ si $AB = 0$. En effet si $A^2 \neq 0$, A admet un inverse et $AB = 0$ implique $A^{-1}AB = 0 = B$ ce qui est impossible puisque B est différent de zéro. Donc $A^2 = 0$. De même pour B^2 .

Remarque. Diverses extensions sont possibles en particulier à l'opérateur gradient $D = e^\mu \partial_\mu$, les e_μ étant les vecteurs de base et les fonctions étant recherchées dans l'espace $R(1, 3)$.

- 1° L'existence de l'inverse dépend de l'ensemble des fonctions considérées. Il en est de même pour le valeur de l'inverse.
- 2° Comme D^2 est un opérateur scalaire l'inverse à droite D/D^2 coïncide avec l'inverse à gauche $1/D^2D$.
- 3° Soit l'équation $D\Psi = 0$ qui définit un ensemble de fonctions Ψ qui n'est pas vide et contient, comme nous le verrons, d'autres solutions que $\Psi = 0$. Si D avait un inverse $D^{-1}D\Psi = \Psi = 0$, ce qui n'est pas. Donc $D^2 = 0$ pour cet ensemble de fonctions de $CL(1, 3)$.

Applications.

- 1° Nous appliquons à l'équation du photon qui vérifie dans $R(1, 3)$ l'équation de Maxwell $D\Psi = 0$ où Ψ est un bivecteur.

Nous suivons la méthode de Hestenes[6] et nous cherchons des solutions de la forme $\Psi = f \exp i k \cdot x$ où f est un bivecteur constant, k un vecteur et x l'instant-point.

L'équation $D\Psi = 0$ conduit à $kf = 0$ et le théorème général à

$$k^2 = f^2 = 0.$$

Or $k = k_0 e_0 + Kr$ avec $r^2 = -1$ et $e_0 \cdot r = 0$ avec k_0/K scalaires. D'où $(k_0 e_0 + Kr)^2 = k_0^2 - K^2 = 0$.

Posons pour le photon monochromatique $k_0 = K = 2\pi\nu/c$, ν étant la fréquence, d'où $k = 2\pi\nu/c(e_0 + r)$.

Comme $x = e_0ct + ur + r'$, u étant scalaire et r' étant un vecteur orthogonal à r dans l'espace (e_1, e_2, e_3) qui n'intervient pas dans le produit scalaire

$$k \cdot x = \frac{2\pi\nu}{c}(e_0 + r) \cdot (cte_0 + ur) = 2\pi\nu\left(t - \frac{u}{c}\right). \quad (11.1)$$

La condition $f^2 = 0$ s'écrit $(e + ib)^2 = 0$, e et b étant les champs électrique et magnétique dans l'espace euclidien associé à $R(1, 3)$. Or

$$(e + ib)^2 = e^2 - b^2 + 2^i e \cdot b = 0 \quad \text{donc}$$

$$e^2 = b^2, \quad e \cdot b = 0$$

Il reste à prouver que e et b sont orthogonaux à la direction k de propagation dans l'espace euclidien associé. Raisonnons dans cet espace

$$ke_0 = 2\pi\frac{\nu}{c}(1 + re_0) = 2\pi\frac{\nu}{c}(1 + s),$$

avec $s^2 = (re_0)^2 = 1$.

Alors $(1 + s)(e + ib) = 0$

$$e + ib + s \cdot e + s \wedge e + i(s \cdot b) + i(s \wedge b) = 0,$$

si bien que $e \cdot s = b \cdot s = 0$ ce qui démontre la proposition. On en déduit également $e = s \times b$ et $b = -(s \times e)$. La solution cherchée s'écrit

$$\Psi = (e + ib) \exp 2i\pi\nu\left(t - \frac{u}{c}\right), \quad (11.2)$$

pour le photon monochromatique polarisé circulairement.

2° Soit l'équation

$$D\Psi = m\Psi e_0 e_2 e_1, \quad (11.3)$$

où $m = 2\pi m_0 c/h$ où m_0 est la masse propre et h la constante de Planck, $\Psi \in Cl(1, 3)$.

Multiplions (11.3) par D à gauche

$$D^2\Psi = mD\Psi e_0 e_2 e_1 = -m^2\Psi,$$

soit

$$(D^2 + m^2)\Psi = 0, \quad (11.4)$$

pour les Ψ définis par (11.3).

Ce qui par application du théorème suppose $(D^2 + m^2)^2 = 0$, mais $D^2 + m^2$ est un scalaire dont le carré ne peut être nul que s'il est lui-même nul, donc $D^2 + m^2 = 0$. Ainsi D a alors un inverse

$$D^{-1} = -\frac{D}{m^2}. \quad (11.5)$$

Appliquons (11.5) à l'équation (11.3) en multipliant à gauche par D^{-1}

$$D^{-1}(D\Psi) = (D^{-1}D)\Psi = \Psi = mD^{-1}\Psi e_0 e_2 e_1,$$

soit

$$\psi = -D\frac{\Psi}{m}e_0 e_2 e_1$$

ou $m\Psi e_0 e_2 e_1 = D\Psi$ c'est-à-dire (11.3), ce qui justifie à nouveau (11.5).

- 3° Dans le cas des quaternions réels d'Hamilton le théorème général ne s'applique pas puisque les quaternions forment un corps, mais l'inverse existe toujours à droite comme à gauche. Dans le cas des quaternions complexes de P. Girard

$$q = q_0 + as,$$

q_0 scalaire, a scalaire et s vecteur de $R(3, 0)$ de carré 1,

$$q_c = q_0 - a s \text{ et } qq_c = q_c q,$$

mais qq_c peut être nul sans que q_c le soit et $q^{-1} = q_c/qq_c$ est inverse à droite comme à gauche si $qq_c \neq 0$, le théorème général s'applique.

12

RACINES HYPERBOLIQUES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ET POINTS VIRTUELS

Introduction.

On appelle hyperbolique un élément de la forme $x_0 + \varepsilon y_0$ (x_0, y_0 réels) où ε est un vecteur ou un produit de vecteurs de carré 1. Ce sont les éléments d'un anneau commutatif qui n'ont d'inverses que si $x_0^2 \neq y_0^2$. L'équation du premier degré $u = x + \varepsilon y = a$ (a réel) n'a qu'une solution.

Equation du Second Degré.

L'équation $u^2 - 2au + b = 0$ (b réel) admet comme solutions

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 2ax + b = 0 \\ 2xy - 2ay = 0 \end{cases}$$

La solution $y = 0$ correspond aux racines réelles ou imaginaires de $x^2 - 2ax + b = 0$. La solution $x = a$ correspond à $y^2 = a^2 - b$ et est hyperbolique si $a^2 > b$. Dans ce cas l'équation a deux racines réelles distinctes a_1 et a_2 et deux racines hyperboliques

$$\frac{(a_1 + a_2)}{2} + \varepsilon \frac{(a_1 - a_2)}{2}. \quad (12.1)$$

Ce sont les seules racines possibles. On les obtient en remplaçant

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\varepsilon^2 \Delta} \text{ par } \pm \varepsilon \sqrt{\Delta} \text{ si } \Delta = a^2 - b > 0, \varepsilon \in CL(p, q).$$

Théorème.

Si une équation de degré n admet n racines réelles distinctes elle admet $n(n-1)$ racines hyperboliques soit au total n^2 racines.

Soit $a_1, a_2 \dots a_n$ les racines réelles et toutes distinctes. Il y a $n(n-1)/2$ couples (a_i, a_j) donc $n(n-1)$ racines hyperboliques. Soit $n(n-1) + n = n^2$ racines $(a_i + a_j)/2 + \varepsilon(a_i - a_j)/2$ ($i, j = 1, 2 \dots n$).

Corollaire.

Si une équation de degré n admet p racines réelles distinctes d'ordre 1 et q racines imaginaires conjuguées elle admet $p^2 + q$ racines.

Théorème Général.

L'équation de degré n admet des racines toutes réelles

$$a_1, a_2 \dots a_k$$

respectivement aux ordres $b_1, b_2 \dots b_k$ avec la condition

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k = n$$

On suppose les b_i ($i = 1, 2 \dots k$) rangés dans une suite monotone croissante

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \dots \leq b_k$$

Les couples $(a_1, a_2) \dots (a_1, a_k)$ sont tous à l'ordre b_1 , les couples $(a_2, a_3) \dots (a_2, a_k)$ à l'ordre b_2 et ainsi de suite si bien qu'il y a

$$2(k-1)b_1 + 2(k-2)b_2 + \dots + 2[k - (k-1)]b_{k-1}$$

racines hyperboliques soit

$$2kn - 2(b_1 + 2b_2 + \dots kb_k)$$

racines. Posons

$$b_1 + 2b_2 + \dots kb_k = n'$$

Il y a au total $2kn - 2n' + n = (2k + 1)n - 2n'$ racines.

Cas Particulier. On suppose tous les b_i égaux à b , d'où $bk = n$ et $n' = b(1 + 2 + \dots + k) = bk(k + 1)/2$ et un nombre total de racines égal à

$$(2k + 1)n - n(k + 1) = kn.$$

Application. Lorsque dans le plan euclidien on utilise des coordonnées imaginaires $x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 (i^2 = -1)$ on définit des points imaginaires. De même en utilisant des coordonnées hyperboliques $x_1 + \varepsilon x_2, y_1 + \varepsilon y_2$ on définit des points hyperboliques, ou points virtuels.

Théorème.

Une droite réelle rencontre une courbe plane, réelle et algébrique de degré m en m^2 points au plus, réels ou hyperboliques.

Soit une droite réelle (D) d'équation

$$Ax + By + C = 0, \tag{12.2}$$

avec A, B, C réels et $AB \neq 0$ en général et soit

$$P(x, y) = 0, \tag{12.3}$$

l'équation réelle d'une courbe algébrique réelle de degré $m > 1$.

L'élimination de y entre (12.2) et (12.3) conduit à un polynôme $Q(x) = 0$ de degré m . Supposons qu'il admette deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 . Il admet aussi les racines $(x_1 + x_2)/2 + \varepsilon(x_1 - x_2)/2$ comme on l'a vu et avec $y_1 = -A/B x_1 - C/B$ les racines $(y_1 + y_2)/2 + \varepsilon(y_1 - y_2)/2$

d'où 4 points, deux réels et deux hyperboliques. Si $Q(x)$ admet m racines réelles, il y a $m(m-1)/2$ couples de points réels d'où $m(m-1)$ points hyperboliques. Au total $m(m-1) + m = m^2$ points au plus.

On généralise à deux courbes algébriques planes réelles, de degrés m et p . Il y a au plus m^2p^2 points d'intersection.

Remarque. Dans l'espace euclidien $R(3,0)$ si ε est un vecteur unitaire quelconque, les nombres hyperboliques se confondent avec les quaternions complexes de P. Girard. Ces quaternions représentent la partie stable de $CL(3,0)$, c'est-à-dire la partie A de $CL(3,0)$ telle que $\tilde{A} = A$.

Equations Différentielles Linéaires.

Etant donnée une équation différentielle linéaire à variable réelle, à coefficients réels et constants, sans second membre

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y(x) = 0, \quad (12.4)$$

la solution

$$y = \sum_1^n A_i \exp r_i x, \quad (12.5)$$

où les A_i sont des coefficients réels et r_i une solution de

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (12.6)$$

est la solution générale de (12.4) lorsque toutes les racines de (12.6) sont simples et réelles.

Ceci étant nous démontrons les deux propositions suivantes.

1° Si les coefficients constants sont des nombres de l'anneau (u)

$$y = \sum_1^n (A_i + \varepsilon B_i) \exp r_i x, \quad (12.7)$$

est la solution générale de l'équation (12.4) B_i étant des coefficients constants. En effet $\sum_1^n A_i \exp r_i x$ et $\sum_1^n B_i \exp r_i x$ sont des solutions générales de (12.4) donc aussi (12.7).

2° Lorsque les racines de (12.6) sont toutes réelles et simples, la prise en considération des racines hyperboliques ne modifie pas la solution générale (12.7).

Soit deux racines de (12.6) r_i et $r_j (i \neq j)$ et la racine hyperbolique

$$\frac{(r_i + r_j)}{2} + \varepsilon \frac{(r_i - r_j)}{2},$$

et soit (12.8)

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{(r_i + r_j)}{2} x + \varepsilon \frac{(r_i - r_j)}{2} x \right] &= \exp \frac{(r_i + r_j)}{2} x \exp \frac{(r_i - r_j)}{2} \varepsilon x \\ &= \left(\operatorname{ch} \frac{(r_i - r_j)}{2} x + \varepsilon \operatorname{sh} \frac{(r_i - r_j)}{2} x \right) \exp \frac{(r_i + r_j)}{2} x \end{aligned} \quad (12.8)$$

Or

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\exp \frac{(r_i - r_j)}{2} x + \exp \frac{(r_j - r_i)}{2} x \right)}{2} \exp \frac{(r_i + r_j)}{2} x \\ &= (\exp r_i x + \exp r_j x) \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (12.9)$$

De la même façon

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2} \left[\exp \frac{(r_i - r_j)}{2} x - \exp \frac{(r_j - r_i)}{2} x \right] \exp \frac{(r_i + r_j)}{2} x \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (\exp r_i x - \exp r_j x) \end{aligned} \quad (12.10)$$

D'où pour la solution générale (12.11) où A_{ij} est constant

$$\sum_1^n A_{ij} \left[\left(\frac{\exp r_i x}{2} \right) \frac{(1 + \varepsilon)}{2} + \left(\frac{\exp r_j x}{2} \right) \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \right], \quad (12.11)$$

la somme \sum étant étendue à tous les couples (i, j) , si bien que (12.11) n'est pas fondamentalement différente de (12.7) ou, si l'on préfère, *l'introduction des racines hyperboliques équivaut à l'introduction de coefficients hyperboliques* pour la solution générale.

12.1 Produit de Bivecteurs.

Premièrement soient a, b, c, d quatre vecteurs de l'espace vectoriel E_n auquel est associé une forme quadratique $R(p, q)$.

Nous posons $P = (a \wedge b)(c \wedge d) = (ab - a \cdot b)(cd - c \cdot d)$

$$P = abcd - (a \cdot b)cd - (c \cdot d)ab + (a \cdot b)(c \cdot d) \quad (12.1.1)$$

Nous rappelons les formules

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad (12.1.2)$$

$$bcd = (b \cdot c)d - (b \cdot d)c + (c \cdot d)b + b \wedge c \wedge d \quad (12.1.3)$$

$$a(b \wedge c \wedge d) = a \cdot (b \wedge c \wedge d) + a \wedge b \wedge c \wedge d \quad (12.1.4)$$

$$a \cdot (b \wedge c \wedge d) = (a \cdot b)(c \wedge d) - (a \cdot c)(b \wedge d) + (a \cdot d)(b \wedge c) \quad (12.1.5)$$

et nous substituons tous ces résultats dans l'expression de P .

On obtient ainsi tous calculs faits

un scalaire $S = (b \cdot c)(a \cdot d) - (b \cdot d)(a \cdot c)$

un bivecteur $B = (b \cdot c)(a \wedge d) - (b \cdot d)(a \wedge c) - (a \cdot c)(b \wedge d) + (a \cdot d)(b \wedge c)$

un 4-vecteur $Q = a \wedge b \wedge c \wedge d$

Soit en définitive

$$P = S + B + Q \quad (12.1.6)$$

Carrés de Bivecteurs.

1) En prenant $a = c$ et $b = d$ dans (12.1.6)

$$(a \wedge b)^2 = (a \cdot b)^2 - a^2 b^2 (\text{scalaire}) \quad (12.1.7)$$

2) $(a \wedge b + c \wedge d)^2 = (a \wedge b)^2 + (c \wedge d)^2 + (a \wedge b)(c \wedge d) + (c \wedge d)(a \wedge b)$

Or $(a \wedge b)(c \wedge d) + (c \wedge d)(a \wedge b) = 2S + 2Q$, d'où

$$(a \wedge b + c \wedge d)^2 = (a \wedge b)^2 + (c \wedge d)^2 + 2(b \cdot c)(a \cdot d) - 2(b \cdot d)(a \cdot c) + 2a \wedge b \wedge c \wedge d$$

La partie bivectorielle est nulle et ce résultat est général, quel que soit le nombre de bivecteurs additionnés. En effet la somme de bivecteurs est invariante dans l'opération de retournement par suite de son élévation au carré et il doit donc en être de même dans son développement. Il ne reste que les parties scalaire et quadrivectorielle. Ajoutons encore que si tous les vecteurs sont dans un même plan, la partie quadrivectorielle est nulle, et ne reste que la partie scalaire.

Espaces Euclidiens.

Dans les espaces strictement euclidiens ($e_i^2 = 1$ pour tout n) on interprète les résultats précédents.

1) Si θ est l'angle des vecteurs a, b alors $(a \wedge b)^2 = -\sin^2 \theta a^2 b^2$.

Soit e_1, e_2, e_3 une base orthonormée, e_1 et e_2 étant dans le plan a, b . On pose $e_1 e_2 e_3 = i_3$ avec $i_3^2 = -1$. On écrit

$$a \wedge b = i_3 a \times b \text{ et } (a \wedge b)^2 = -(a \times b)^2 = -a^2 b^2 \sin^2 \theta$$

2) $P' = (a \wedge b + c \wedge d)^2$. On suppose c et d dans la plan a, b . Alors on peut poser

$$c \times d = \lambda a \times b \quad (\lambda, \text{ réel}) \text{ et } (a \wedge b + c \wedge d)^2 = -a^2 b^2 (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta$$

la généralisation à une somme de bivecteurs tous coplanaires étant immédiate.

Deuxièmement nous examinons le cas $n = 3$ où E_3 est associé à $R(3, 0)$.

On pose $e_1 e_2 e_3 = i_3$ avec $(i_3)^2 = -1$.

On vérifie que i_3 commute avec tous les vecteurs.

Si $a = a^i e_i$, $b = b^j e_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) on écrit

$$a \wedge b = \sum_{i < j} (a^i b^j - a^j b^i) e_i e_j \quad (12.1.8)$$

mais $e_1e_2 = i_3e_3$, $e_2e_3 = i_3e_1$, $e_3e_1 = i_3e_2$ et l'on récrit (12.1.8) sous la forme

$$a \wedge b = i_3(a \times b)$$

où $a \times b$ désigne le produit en croix qui est un vecteur, donc $a \wedge b$ est un quaternion. De même $ab = a \cdot b + i_3(a \times b)$ est un quaternion. Alors, les quaternions formant un corps, P est un quaternion.

$$\begin{aligned} P &= (a \wedge b)(c \wedge d) = -(a \times b)(c \times d), \text{ soit} \\ P &= -(a \times b) \cdot (c \times d) - i_3(a \times b) \times (c \times d) \end{aligned}$$

Sa norme est $[(a \times b) \cdot (c \times d)]^2 + [(a \times b) \times (c \times d)]^2$ c'est-à-dire $(a \times b)^2(c \times d)^2$.

Les quaternions formant un corps le produit de bivecteurs en nombre quelconque est encore un quaternion.

Troisièmement nous examinons le cas $n = 4$ où E_4 est associé à la forme $R(1,3)(e_0)^2 = 1$, $(e_1)^2 = -1$, $(e_2)^2 = -1$, $(e_3)^2 = -1$. On pose $e_0e_1e_2e_3 = i$ si bien qu'un bivecteur quelconque B se développe sur la base des bivecteurs selon

$$B = a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + i(b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3)$$

avec $s_1 = e_1e_0$, $s_2 = e_2e_0 = s_3 = e_3e_0$.

Il s'ensuit $(s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_3)^2 = 1$ et $s_1s_2s_3 = i$. D'où pour le bivecteur

$$B = s + is' \tag{12.1.9}$$

avec $s = a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3$ et $s' = b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3$

Il en résulte qu'il existe un isomorphisme entre cette algèbre d'espace de base s_1, s_2, s_3 associée à $R(1,3)$ Hestenes [1] et l'algèbre d'espace de $R(3,0)$. Notons encore que

$$s \wedge s' = i(s \times s') \tag{12.1.10}$$

est isomorphe au bivecteur de $R(3,0)$ i_3 étant remplacé par i . Il existe donc un isomorphisme entre ces quaternions extraits de $R(1,3)$ et les quaternions de $R(3,0)$ ce qui nous permet de ne pas les considérer comme des êtres mathématiquement différents.

Posons $q_1 = is'$, $q_2 = -is$, q_1 et q_2 étant deux quaternions. Alors (12.1.9) est de la forme

$$B = s + is' = q_1 + iq_2 \quad (12.1.11)$$

Calculons $B^2 = (s + is')^2 = s^2 - s'^2 + 2is \cdot s'$

Si $s \cdot s' = 0$, alors $B^2 = s^2 - s'^2$ est réel et l'on dit que B est élémentaire.

Si $s^2 > s'^2$ le bivecteur est dit temporel

Si $s^2 = s'^2$ le bivecteur est dit isotrope

Si $s^2 < s'^2$ le bivecteur est dit spatial

Plus généralement cette forme (12.1.11) est celle des parties paires des nombres de Clifford dans $R(1,3)$.

$$r + s + is' + im \quad (r \text{ et } m \text{ réels})$$

On pose $r + is' = q_1$, $m - is = q_2$ et on retrouve (12.1.11).

Il est bien connu [2] que ces biquaternions $q_1 + iq_2$ ont une structure d'anneau si bien que le produit d'un nombre quelconque mais fini de bivecteurs est un biquaternion.

13

FONCTIONS ANALYTIQUES HYPERBOLIQUES

Introduction.

Soit un espace vectoriel E_n et une base canonique d'une algèbre de Clifford $CL(p, q)$ avec $p + q = n$. Soit ε le produit de r vecteurs de carré 1. L'ensemble $A = (x + \varepsilon y)$ (x et y réels) a une structure d'anneau commutatif. Il doit donc pouvoir jouer un rôle "symétrique" du rôle joué par le corps $(a + ib)$ lorsque le carré du produit de vecteurs ou du vecteur est égal à -1, [$i, \varepsilon \in CL(p, q)$].

Fonctions Analytiques Hyperboliques.

Ce sont les fonctions $f(u)$ dont les valeurs appartiennent à l'anneau A . On peut donc poser

$$f(x + \varepsilon y) = P(x, y) + \varepsilon Q(x, y)$$

Pour $\varepsilon = 1$, $f(x + y) = P + Q$

Pour $\varepsilon = -1$, $f(x - y) = P - Q$, d'où

$$f(x + \varepsilon y) = \frac{[f(x + y) + f(x - y)]}{2} + \frac{\varepsilon[f(x + y) - f(x - y)]}{2} \quad (13.1)$$

ou encore

$$f(x + \varepsilon y) = \frac{(1 + \varepsilon)}{2} f(x + y) + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} f(x - y) \quad (13.2)$$

définie en un point $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $f(x_0 + y_0)$ et $f(x_0 - y_0)$ sont définies. On suppose que l'ensemble des points de définition est un ouvert (0) du plan euclidien.

Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux fois constinûment dérivables

$$1^\circ. \quad P'_x = Q'_y, \quad P'_y = Q'_x \quad \text{pour les dérivées premières} \quad (13.3)$$

$$2^\circ. \quad P''_{x^2} = P''_{y^2}, \quad Q''_{x^2} = Q''_{y^2} \quad \text{pour les dérivées secondes} \quad (13.4)$$

$$3^\circ. \quad \int_c (P + \varepsilon Q)(dx + \varepsilon dy) = \int_c P dx + Q dy + \varepsilon \int_c Q dx + P dy = 0 \quad (13.5)$$

lorsque C est un contour sans point double, ce qui se prouve en transformant les intégrales en intégrales doubles et en appliquant les conditions (13.3).

On peut rapprocher (13.3), (13.4) et (13.6) des résultats concernant les fonctions harmoniques et holomorphes.

Exemples

- I. ${}^n\sqrt{\varepsilon} \notin A$ si n est pair car $(-1)^{1/n}$ n'a pas de sens.
Si n est impair ${}^n\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$ pour tout n impair.

II. Soient f et g deux fonctions de u

$$[f(u)]^{g(u)} = [f(x+y)]^{g(x+y)} \frac{(1+\varepsilon)}{2} + [f(x-y)]^{g(x-y)} \frac{(1-\varepsilon)}{2}$$

qui est définie pour $f(x \pm y)$ strictement positives.

III. $(2 + \varepsilon)^\varepsilon = \frac{3(1+\varepsilon)}{2} + \frac{(1-\varepsilon)}{2} = 2 + \varepsilon$

$$(2 + \varepsilon)^{2+\varepsilon} = \frac{3^3(1+\varepsilon)}{2} + \frac{(1-\varepsilon)}{2} = 14 + 13\varepsilon$$

IV. $\varepsilon^\varepsilon = \varepsilon$ car $\varepsilon^\varepsilon = P + \varepsilon Q$ et $P + Q = 1$, $P - Q = -1$.

V. $\frac{1}{(u-u_0)} = \frac{1}{(X+\varepsilon Y)}$ en posant $x - x_0 = X$, $y - y_0 = Y$

$$\frac{1}{(u-u_0)} = \frac{X}{(X^2-Y^2)} - \frac{\varepsilon Y}{(X^2-Y^2)}$$

définie partout sauf sur $X^2 = Y^2$, parallèles aux bissectrices des axes passant par $M_0(x_0, y_0)$. On ne peut donc pas imaginer un contour simple entourant M_0 et conservant la continuité.

Séries Entières

On dira que $f(u)$ est développable en série entière si la série $a_n u^n$ converge les a_n étant réels. On écrira

$$f(u) = \sum_0^{+\infty} a_n u^n$$

pour une valeur de M_0 appartenant au domaine d'absolue convergence. Or

$$u^n = \frac{[(x+y)^n + (x-y)^n]}{2} + \frac{\varepsilon[(x+y)^n - (x-y)^n]}{2}$$

et la série $a_n u^n$ converge si les séries

$$U_n = \frac{[(x+y)^n + (x-y)^n]}{2} a_n$$

$$V_n = \frac{[(x+y)^n - (x-y)^n]}{2} a_n$$

convergent, c'est-à-dire si les séries $U_n + V_n = a_n(x+y)^n$ et $U_n - V_n = a_n(x-y)^n$ sont absolument convergentes, ce qui suppose

$$|x+y| < \frac{1}{L} \text{ et } |x-y| < \frac{1}{L}$$

L étant la limite supérieure de $|a_n|^{1/n}$ pour n infini.

Les séries $U_n + V_n$ et $U_n - V_n$ convergent alors vers $f(x \neq y)$ et $f(x-y)$ ce qui redonne pour $f(u)$ la formule (13.1).

On obtient pour le domaine de convergence un carré dont les sommets sont sur les axes (figure).

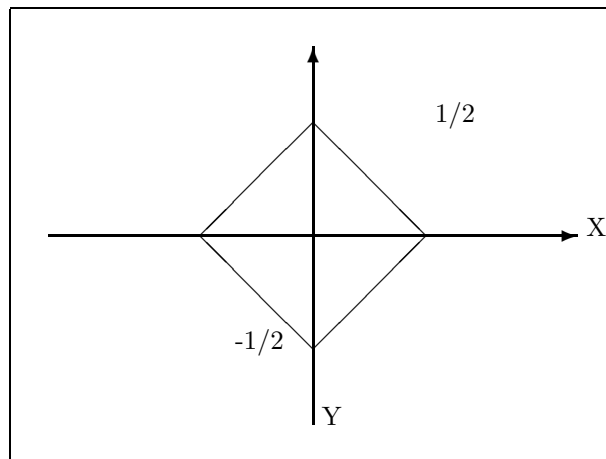


Figure 4

Applications

I. On vérifie par développement en série valable dans tout le plan ($L = 0$) les formules

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon y &= \varepsilon \sin y, \cos \varepsilon y = \cos y, \text{ d'où } tg \varepsilon y = \varepsilon tg y \\ \operatorname{sh} \varepsilon y &= \varepsilon \operatorname{sh} y, \operatorname{ch} \varepsilon y = \operatorname{ch} y, \text{ d'où } \operatorname{th} \varepsilon y = \varepsilon \operatorname{th} y. \end{aligned}$$

Par application de (13.1) on écrit

$$\begin{aligned} \sin(x + \varepsilon y) &= \sin x \cos y + \varepsilon \sin y \cos x \\ \cos(x + \varepsilon y) &= \cos x \cos y - \varepsilon \sin x \sin y \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x + \varepsilon y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \varepsilon \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch}(x + \varepsilon y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \varepsilon \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

et en conséquence $tg(x + \varepsilon y)$ et $\operatorname{th}(x + \varepsilon y)$.

II. On définit $\log(1 + u)$ en intégrant à l'intérieur du carré d'absolue convergence la série

$$\frac{1}{(1 + u)} = 1 - u + u^2 + \dots (-1)^n u^n + \dots$$

qui converge pour $|x \pm y| < 1$, soit

$$\log(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \dots$$

et pour $|y| < 1$

$$\log(1 + \varepsilon y) = \log \sqrt{1 - y^2} + \varepsilon \operatorname{Arg} \operatorname{th} y \tag{13.6}$$

On retrouve (13.6) par application de la formule générale (13.1)

$$\log(x + \varepsilon y) = \log \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{(x + y)}{(x - y)}$$

qui exige $x^2 > y^2$ ou $|x| > |y|$, soit M_0 intérieur à l'angle des bissectrices des axes qui contient l'axe \tilde{Ox} .

14

FONCTIONS ANALYTIQUES PARABOLIQUES

Soit $v = x + \alpha y$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha^2 = 0$, x et y réels) les éléments d'un anneau commutatif. Ainsi dans $R(1, 3)$ si e_0, e_1, e_2, e_3 forment une base canonique $e_0^2 = 1, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$, le vecteur $\alpha = e_1 + e_0$ est différent de zéro tandis que

$$\alpha^2 = (e_1 + e_0)^2 = 0 \quad (14.1)$$

L'anneau admet des diviseurs de zéro comme α .

Fonctions Paraboliques.

Nous appelons fonction parabolique de l'anneau $A = (X + \alpha y)$ la fonction $f(v)$ définie par son développements en série de puissances

$$f(v) = \sum_0^{+\infty} a_n v^n \quad (14.2)$$

où les coefficients a_n sont réels. Nous écrivons

$$v^n = (x + \alpha y)^n = x^n + \alpha y n x^{n-1} \quad (14.3)$$

D'où

$$f(v) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n + \alpha y \sum_0^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad (14.4)$$

$$f(v) = f(x) + \alpha y f'(x)$$

ceci pour $x \in [-R, R]$ si $R < 1/L$, L , étant la limite supérieure de $|a_n|^{1/n}$ pour n infini.

Nous posons

$$\vec{f}(v) = f(x) - \alpha y f'(x)$$

d'où $f(v)\vec{f}(v) = f^2(x)$

En conséquence $f(v)$ est défini si et seulement si $f(x)$ et $f'(x)$ sont définis.

Exemples.

$$\begin{aligned} \sin(x + \alpha y) &= \sin x + \alpha y \cos x \\ \cos(x + \alpha y) &= \cos x - \alpha y \sin x \\ \text{sh } \alpha y &= \alpha y, \sin \alpha y = \alpha y \\ \cos \alpha y &= 1, \text{ ch } \alpha y = 1 \\ \ln(x + \alpha y) &= \ln x + \frac{\alpha y}{x} \quad \text{si } x > 0 \\ \ln(1 + \alpha y) &= \alpha y \\ \ln f(v) &= \ln f(x) + \frac{\alpha y f'(x)}{f(x)} \quad \text{si } f(x) > 0 \end{aligned} \quad (14.5)$$

De (14.5) on déduit

$$\ln f(v) = \ln f(x) + \ln \left[\frac{1 + \alpha y f'(x)}{f(x)} \right]$$

D'une façon générale nous prouvons si $g(v)$ est une fonction de v

$$\ln[f(v)g(v)] = \ln f(v) + \ln g(v)$$

En effet

$$\begin{aligned} \ln f(v)g(v) &= \ln f(x)g(x) + \frac{\alpha y f'(x)}{f(x)} + \frac{\alpha y g'(x)}{g(x)} \\ &= \ln f(v) + \ln g(v) \end{aligned}$$

si $f(v)$ et $g(v)$ sont positifs.

Théorème.

Nous écrivons

$$[f(v)]^{g(v)} = [f(x)]^{g(x)} + \alpha y \left[[f(x)]^{g(x)} \right]$$

si $f(x)$ est positive.

Calculons le dernier terme

$$\left[\exp g(v) \ln f(x) \right]'_x = \left[\frac{g'(x) \ln f(x) + g(x) f'(x)}{f(x)} \right] f(x)^{g(x)}$$

ce qui justifie

$$[f(v)]^{g(v)} = [f(x)]^{g(x)} + \alpha y \left[g'(x) f(x) \ln x + g(x) f'(x) \right] [f(x)]^{g(x)-1}$$

Applications.

Si $x > 0$,

$$v^v = (x + \alpha y)^{x + \alpha y} = x^x + \alpha y [1 + \ln x] x^x$$

Si $x = 1$,

$$(1 + \alpha y)^{1 + \alpha y} = 1 + \alpha y$$

Si $x = n$ (entier),

$$(x + \alpha y)^{x + \alpha y} = n^n + \alpha y [1 + \ln n] n^n$$

Théorème.

Nous récrivons la relation (14.4)

$$f(v) = P(x, y) + \alpha Q(x, y)$$

avec $P(x, y) = f(x)$, $Q(x, y) = y f'(x)$

On en déduit

$$1^\circ) P'(x) = Q'(y)$$

$$2^o) \int_c (P + \alpha Q)(dx + \alpha dy) = \int_c P(x)dx + \alpha \int_c Pdy + Qdx$$

la courbe (C) étant sans point double et les fonctions P, Q étant dérivables dans (C) .

Il reste

$$\int_c (P + \alpha Q)(dx + \alpha dy) = \int_c Pdx = 0$$

Equations Algébriques.

Soit une équation algébrique sur \mathbb{R}

$$P(x) = 0$$

où P est un polynôme.

Nous cherchons si cette équation admet des racines paraboliques $x + \alpha y$ telles que

$$P(x + \alpha y) = P(x) \quad \alpha y P'(x) = 0$$

d'où $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$

La solution $P(x) = 0$ suppose x réel ou imaginaire et la solution $P'(x) = 0$ suppose que x est une racine double lorsqu'elle existe. Dans ce dernier cas y est arbitraire puisque $\alpha^2 y^2 = 0$ et que les racines sont sur la parallèle à $\vec{o}y$ ayant la double racine comme abscisse.

Remarque. Les nombres paraboliques $x + \alpha y$ ont été appelés nombres duaux par E. Study, *Geometric der Dynamen*, Leipzig, 1903, qui les utilise en Mécanique dans l'étude des systèmes glissants attachés au corps solide.

15

L'ESPACE DE MINKOWSKI

C'est l'espace $R(1, 3)$ avec $(e_0)^2 = 1, (e_k)^2 = -1$ et $k = 1, 2, 3$.

On pose $x_0 = x^0, x_k = -x^k, e_0 = e^0, e_k = -e^k$ et pour l'instant point $x = x^\mu e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$.

Il existe quatre matrices (4×4) qui vérifient tous les axiomes

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} & e_k &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{avec } 0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

i' étant l'imaginaire usuelle.

Comme $(e_0 e_1 e_2 e_3)^2 = -1$ on pose $e_0 e_1 e_2 e_3 = i$ qui anticommute avec tous les vecteurs et tel que $\tilde{i} = i$.

En posant $e_1 e_0 = s_1, e_2 e_0 = s_2, e_3 e_0 = s_3$ on obtient $(s_k)^2 = 1, s_1 s_2 s_3 = i$. Tous les s_k anticommulent si bien qu'ils forment une base d'un espace à trois dimensions associé à l'espace de Minkowski.

Décomposition d'un Bivecteur.

De

$$is_1 = e_3e_2, \quad is_2 = e_1e_3, \quad is_3 = e_2e_1$$

on déduit étant donné un bivecteur B

$$B = \sigma + i\sigma'$$

σ et σ' étant deux vecteurs d'espace, induit

$$B^2 = \sigma^2 - \sigma'^2 + 2i\sigma \cdot \sigma'$$

qui n'est nul que si σ et σ' sont orthogonaux et si $\sigma^2 = \sigma'^2$.

B étant un bivecteur de carré non nul, B se décompose en un bivecteur b de carré positif multiplié par $S_1 + iS_2$, S_1 et S_2 étant deux scalaires. On pose $B = (S_1 + iS_2)b$ et

$$\begin{aligned} b &= (\exp i\varphi)B \\ b^2 &= (\exp 2i\varphi)B^2 = (\exp 2i\varphi)(\sigma^2 - \sigma'^2 + 2i\sigma \cdot \sigma') \\ &= \cos 2\varphi(\sigma^2 - \sigma'^2) - 2(\sin 2\varphi)\sigma \cdot \sigma' \\ &\quad + 2i(\cos 2\varphi)\sigma \cdot \sigma' + i(\sin 2\varphi)(\sigma^2 - \sigma'^2) \end{aligned}$$

En prenant, λ étant un scalaire convenable,

$$\cos 2\varphi = \frac{\lambda}{2}(\sigma^2 - \sigma'^2) \sin 2\varphi = -\lambda(\sigma \cdot \sigma') \quad \text{et}$$

$$1 = \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 - \sigma'^2) + \lambda^2(\sigma \cdot \sigma')^2$$

on obtient un b^2 positif, d'où

$$B = (\exp -i\varphi) \quad b = (S_1 + iS_2)b$$

Part II

QUELQUES APPLICATIONS À LA PHYSIQUE

16

FONCTION D'ONDE

Une solution de l'équation de Dirac est une matrice unicolonne à éléments complexes

$$\Psi = \begin{pmatrix} a_1 & +i'a_2 \\ b_1 & +i'b_2 \\ c_1 & +i'c_2 \\ d_1 & +i'd_2 \end{pmatrix}$$

Soit le nombre pair de Clifford

$$A = a_1 + d_1 e_1 e_0 + d_2 e_2 e_0 + c_1 e_3 e_0 + a_2 e_2 e_1 \\ + b_2 e_3 e_2 + b_1 e_3 e_2 + c_2 e_0 e_1 e_2 e_3$$

Lorsque l'on remplace les vecteurs par les matrices on obtient une matrice M qui multipliée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

redonne Ψ . D'où $\Psi = Mu$

La transformation de A en Ψ est bijective car, inversement, se donner Ψ c'est se donner huit scalaires $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$, donc c'est se donner A sans ambiguïté.

Enfin $\Psi = 0$ implique $A = 0$ et donc $M = 0$.

Rotations de Lorentz

Si R est un biquaternion tel que $R = \bar{R}$ et $R\tilde{R} = 1$, R est une rotation de Lorentz qui fait passer d'une base canonique à une base canonique.

Soit x un vecteur et $x' = R \times \tilde{R}$.

Le vecteur x est caractérisé par $\bar{x} = -x, \tilde{x} = x$.

Or $\bar{x}' = -x'$ et $\tilde{x}' = x'$, donc x' est un vecteur. De plus

$$x'^2 = R \times \tilde{R}R \times \bar{R} = Rx^2\tilde{R} = x^2$$

La transformation est une isométrie. De plus le sens de la base est conservé $i = R\tilde{R}$, c'est une rotation dite de Lorentz.

17

DÉCOMPOSITION CANONIQUE DES ROTATIONS.

On écrit $R = S + B + P$

S étant un scalaire, B un bivecteur et P un 4-vecteur. Si $B^2 \neq 0$ il existe S_1 et S_2 scalaires tels que

$$B = (S_1 + iS_2)b$$

b^2 étant positif.

Ecrivons $R\tilde{R} = 1$, soit

$$(S + P)^2 - (S_1 + iS_2)^2 b^2 = 1 \quad (17.1)$$

et en posant $P = ip$

$$\begin{cases} S^2 - p^2 + (S_2^2 - S_1^2) \\ Sp - S_1 S_2 = 0 \end{cases} \quad (17.2)$$

En prenant $b^2 = p$ et $S = S_1 S_2$ il reste la seule condition

$$S_1^2 S_2^2 - p^2 + b^2(S_2^2 - S_1^2) = 1$$

qui s'écrit

$$(S_1^2 + b^2)(S_2^2 - b^2) = 1$$

Posons

$$\begin{aligned} S_1 &= a \cos b_1, & b &= a \sin b_1 & \text{et} & & b_1 &= \lambda b \quad (\lambda \text{ scalaire}) \\ a S_2 &= \text{ch } b_2, & ab &= \text{sh } b_2, & b_2 &= \mu b & \text{et} & \mu \text{ scalaire.} \end{aligned}$$

D'où

$$S_1^2 S_2^2 = \cos^2 b_1 \text{ ch }^2 b_2 = (1 - \sin^2 b_1)(1 + \text{sh }^2 b_2)$$

d'où une équation bicarrée en a

$$a^2 S^2 = (a^2 - p)(1 + a^2 p)$$

qui détermine a par sa racine positive.

Dès lors $b = a \sin b_1$ et $ab = \text{sh } b_2$ déterminent λ et μ par leurs développements en séries. Si bien que

$$\begin{aligned} R &= S_1 S_2 + (S_1 + i S_2)b + ip \\ &= \exp ib_1 \exp b_2 = \exp(b_2 + ib_1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$B = (\mu + i\lambda)b$$

En définitive

$$B = (\theta + i\varphi)b'$$

avec θ et φ réels et $b'^2 = 1$ et $b' = kb$ (k scalaire).

On obtient la décomposition canonique de R

$$R = (\cos \varphi + ib' \sin \varphi)(\text{ch } \theta + b' \text{sh } \theta)$$

avec $b'^2 = 1$.

Cas où $B^2 = 0$. Les équations (1) deviennent

$$S^2 - p^2 = 1 \text{ et } Sp = 0, \text{ d'où } p = 0 \text{ et } S = 1 \text{ ou } -1$$

Si $S = 1, R = 1 + B$ donc $R = \exp B$.

Si $S = -1, R = -1 + B = -\exp B$.

Forme Trigonométrique de la Fonction d'Onde.

Soit $\Psi = S + B + P$ et $\tilde{\Psi} = S - B + P$ et

$$\Psi\tilde{\Psi} = (S + P)^2 - (\theta + i\varphi)^2 = g + ig'$$

g et g' étant des scalaires, d'où

$$\Psi\tilde{\Psi} = \rho \exp i\beta$$

Posons $\Psi = (\rho \exp i\beta)^{1/2} R$, d'où

$$R = \bar{R} \text{ et } R\bar{R} = 1$$

R est donc une rotation de Lorentz.

Applications Physiques

Ces applications concernent l'électromagnétisme, qui a été mis sous forme cliffordienne par Mercier (1935) et aussi par Riesz, et à l'équation de Dirac. Si l'on considère que sa solution est un nombre pair de $CL(1, 3)$, celui-ci se décompose en deux quaternions $g + iq'$, ce qui conduit à deux équations. C'est la méthode de Lanczos (1929) qui a été proposée encore récemment pour remplacer l'équation de Dirac.

La forme Cliffordienne de la solution à l'équation de Dirac est connue depuis, aux moins, Sommerfeld (1932) ou Flügge (1947).

Nous utiliserons la forme trigonométrique de la solution $(\rho \exp i\beta)^{1/2} R$ solution cliffordienne de l'équation utilisée par D. Hestenes et qui a l'avantage de mettre en facteur la probabilité (Space-time Algebra, New-York, 1966) ce qui nous des solutions $\rho(x)^{1/2} R$ qui correspondent à un champ

magnétique uniforme dans un cylindre. La rencontre d'un flux d'électrons libres avec un tel champ magnétique nous permettra de mettre en évidence la non-localisation des électrons libres dans leur onde et de démontrer ainsi une proposition fondamentale de la mécanique quantique.

Cette forme cliffordienne de l'équation permet d'interpréter l'angle β d'Yvon-Takabayasi. En prenant le gradient des deux membres on trouve que la masse propre est $m \cos \beta$, mélange d'ondes à énergie non potentielle positive et négative. Pour interpréter ces énergies négatives Dirac fait appel à une théorie des trous ou lacunes à énergie négative qui se comportent comme des positons. On peut, plus avantageusement, postuler un principe d'invariance du réel physique dans une symétrie temporelle instantanée, ce qui revient à dire que le réel physique ignore à tout instant, étant inanimé, le sens d'écoulement du temps, notion éminemment subjective.

C'est ce que nous avons soutenu dans notre Thèse (Paris VI, 1971).

18

OPÉRATEURS.

Dans $R(1, 3)$ on pose

$$e^0 = e_0, e^k = -e_k (k = 1, 2, 3)$$

$$x_0 = x^0 = ct, x_k = -x^k$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial} x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Dans le cône passé-futur, le gradient est l'opérateur

$$D = e^\mu \partial_\mu \text{ ou } D = \square$$

Si

$$A \in CL(1, 3), \quad DA = D \cdot A + D \wedge A$$

$D \cdot A$ est la divergence et $D \wedge A$ le rotationnel.

Dans $R(3, 0)$ le gradient d'espace est

$$\nabla = \sigma_k \partial_k$$

Alors $e_0 \wedge D = e_0 e^k \partial_k$ et $e_0 \cdot D = \partial_0$

$$e_0 D = \partial_0 + \nabla$$

Enfin

$$D^2 = (e^\mu \partial_\mu)^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Δ étant le laplacien.

Dans $R(1, 3)$ l'électromagnétisme se met sous une forme très simple et très élégante puisqu'il se résume dans l'équation

$$DF = J = Je$$

où F est un bivecteur et J un vecteur densité de courant.

Dans $R(1, 3)$ $F = E + iH$ avec $E = E_1 s_1 + E_2 s_2 + E_3 s_3$ et $H = H_1 s_1 + H_2 s_2 + H_3 s_3$ et $e_0 J = q - j$
 q scalaire et j vecteur de $R(3, 0)$, d'où

$$e_0(DF) = q - j = (\partial_0 + \nabla)(E + iH)$$

qui, développée redonne les équations de Lorentz pour l'électron dans le vide

$$\nabla \cdot E = q, \quad \partial_0 E - \nabla \times H = -j$$

$$\partial_0 H + \nabla \times E = 0, \quad \nabla \cdot H = 0$$

Conservation de l'Électricité.

L'équation fondamentale implique la conservation de l'électricité car $D^2 F = DJ = D \cdot J + D \wedge J$ et, comme D^2 est scalaire il faut $D \cdot F = 0$ c'est-à-dire

$$(DJ)_S = (e_0 D J e_0)_S = [(e_0 D)(J e_0)]_S = 0$$

la lettre S indiquant la partie scalaire.

Cette dernière condition s'écrit

$$[(\partial_0 + \nabla)(q + j)]_S = 0$$

c'est-à-dire

$$\partial_0 q + \nabla \cdot j = 0$$

ce qui est la condition annoncée.

Potentiel

Exprimons F comme gradient d'un vecteur A dit potentiel

$$F = DA = D \cdot A + D \wedge A$$

mais F étant un bivecteur

$$D \cdot A = 0 \text{ et } F = D \wedge A$$

si bien que $D^2 A = J$ qui est l'équation d'onde de A .

Ce vecteur A n'est pas unique. Posons en effet

$$A' = A + D\chi$$

avec $D^2 \chi = 0$ et χ scalaire. On en déduit

$$DA' = DA$$

ce qui convient, et c'est *l'invariance de jauge*.

Calcul des Champs

Soit

$$A = A_0 + A_1$$

A_1 étant un vecteur d'espace

$$\begin{aligned} F &= (De_0)(e_0A) \\ &= (\partial_0 - \nabla)(A_0 - A_1) = E + iH \end{aligned}$$

d'où

$$E = -\partial_0 A_1 - \nabla A_0, \quad H = \nabla \times A$$

Force de Lorentz

On appelle force de Lorentz dans l'espace-temps le vecteur

$$K = F \cdot J$$

En posant

$$Ke_0 = K_0 + K_1$$

en désignant par K_0 la composante temporelle et par K_1 le vecteur d'espace associé, on trouve aisément

$$K_0 = E \cdot j, \quad K_1 = qE + j \times H$$

19

EQUATION DE HESTENES

C'est l'équation

$$D\Psi = (m\Psi e_0 + eA\Psi)e_2e_1 \quad (19.1)$$

Les e_μ sont les vecteurs d'une base fixe, A le potentiel-vecteur est un vecteur d'espace-temps, enfin

$$e^- = e\hbar, \quad m_0 = \frac{m\hbar}{c}$$

m_0 et e^- étant la masse propre et la charge de l'électron et \hbar la constante réduite de Planck.

1° *A toute solutions de l'équation de D. Hestenes il correspond une solution de l'équation matricielle de Dirac.*

Ψ est un biquaternion, c'est la fonction d'onde.

Remplaçons dans (19.1) les vecteurs par les matrices et remarquons que

$$e_0u = u, \quad e_2e_1u = i'u$$

Le biquaternion Ψ devient une matrice $M(4 \times 4)$ que l'on multiplie par u et l'on pose

$$\Phi = Mu$$

D devient un opérateur matriciel D_1 et (19.1) s'écrit

$$D_1\Phi = (m\Phi + eA\Phi)i'$$

mais i' est $i' I$, I étant une matrice-unité (4×4) qui commute avec toutes les matrices-vecteurs et l'on récrit (19.1) en posant $i' = \chi\hbar$

$$D_1\Phi = (\chi m_0 c + \chi \frac{e^-}{c} A)$$

ou encore avec $A = A^\mu e_\mu = A_\mu e^\mu$

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} e_0 - \chi \frac{e^-}{c} A_0 e_0 - \left(\chi \frac{e^-}{c} A^k e_k + e_k \partial_k \right) - \chi m_0 c \right] \Phi = 0$$

Multiplions à gauche par e_0 ce qui conduit à

$$\left[\frac{\partial}{c \partial t} - \chi \frac{e^-}{c} A_0 - (e_0 e_k \partial_k + \chi \frac{e^-}{c} A^k e_0 + e_k) - \chi m_0 c e_0 \right] \Phi = 0$$

Les matrices e_0 et $e_0 e_k$ vérifient les conditions de Dirac et la dernière équation représente l'équation de Dirac sous la forme matricielle.

2° *A toute solution matricielle de Dirac il correspond une solution vectorielle de l'équation d'Hestenes.*

Nous avons vu qu'à toute solution matricielle il correspond un bi-quaternion Ψ . Formons

$$C = D\Psi - (m\Psi e_0 + eA\Psi)e_2 e_1$$

Remplaçons les vecteurs par les matrices. On obtient

$$Cu = D\Phi - (\chi m_0 c + \chi \frac{e^-}{c} A)\Phi$$

Or le second membre est nul puisque Φ est solution d'une équation de Dirac, donc $Cu = 0$ et en multipliant par e_0 à gauche

$$e_0Cu = 0$$

Mais e_0C est un nombre pair de Dirac et donc

$$e_0C = 0 \text{ soit } C = 0$$

donc Ψ est solution d'une équation de Hestenes, et l'équivalence est prouvée.

Invariance Relativiste

Soit R_0 une rotation de Lorentz déterminée. Posons $\Psi = \Psi'R_0$, l'équation de D. Hestenes devient

$$D\Psi'R_0 = m\Psi'R_0e_0e_2e_1 + eA\Psi'R_0e_2e_1$$

et, en multipliant par \tilde{R}_0 à droite et en posant

$$e'_i = R_0e_i\tilde{R}_0$$

et en remarquant que $D = D'$ opérateur dans la base e'_i ,

$$D'\Psi' = m\Psi'e'_0e'_2e'_1 + eA\Psi'e'_2e'_1$$

qui a la même forme.

Invariance de Jauge

Si l'on effectue sur A la transformation de jauge

$$A' = A + D\chi \text{ avec } d^2\chi = 0$$

on constate que l'équation de D. Hestenes reste inchangée si l'on remplace Ψ par

$$\Psi' = \Psi \exp e e_2 e_1 \chi$$

car

$$D\Psi' = (D\Psi) \exp e_2 e_1 e \chi + e(D\chi) \Psi e_2 e_1 e \chi$$

et il suffit de remplacer A par A' et Ψ par Ψ' pour le vérifier

Grandeurs de Champ.

Les grandeurs de champ sont des nombres de Dirac $g(d)$ que l'on écrit $g(d) = \Psi g \tilde{\Psi}$ mais ces grandeurs doivent être définies sous invariance de jauge, c'est-à-dire que

$$\Psi' d \tilde{\Psi}' = \Psi \exp e_2 e_1 e \chi d \exp -e_2 e_1 e \chi = \Psi d \tilde{\Psi}$$

condition équivalente à la commutation de d avec $e_2 e_1$. De plus les grandeurs de champ étant réelles ne doivent pas être distinguées de leurs duales, si bien que, en définitive, on ne doit retenir que les seuls produits suivants

$$1, \quad e_0, \quad e_1 e_2, \quad e_3, \quad i$$

Nous avons toutefois conservé 1 et i qui sont duaux car nous n'interpréterons que leurs parties scalaires. Ces nombres définissent les grandeurs physiques suivantes

le scalaire $\Omega = (\Psi \tilde{\Psi})_S$ et le scalaire $\tilde{\Omega} = (\Psi i \tilde{\Psi})_S$

le vecteur courant $J_0 = \Psi e_0 \tilde{\Psi}$

le bivecteur $F = \Psi e_1 e_2 \tilde{\Psi}$

le vecteur de spin $J_3 = \Psi e_3 \tilde{\Psi} = s$

Interprétons la forme trigonométrique de Ψ , soit

$$\Psi = (\rho \exp i\beta)^{1/2} R$$

Comme R est une rotation de Lorentz, il définit en chaque instant -point x de l'espace-temps une base propre e'_μ à partir des e_μ par $e'_\mu = R e_\mu \tilde{R}$.

Cette base est dite propre parce que la vitesse d'espace y est nulle. En effet e_0 est la vitesse d'Univers. Or

$$e_0'^2 = Re_0\tilde{R}Re_0\tilde{R} = e_0^2 = 1$$

et par conséquent la composante spatiales de e_0' , donc la vitesse d'espace, est bien égale à zéro.

Quant à ρ il définit la densité propre de la probabilité de présence de l'électron au point x tandis que β est un angle égal à l'angle d'Yvon-Takabayasi qui sera interprété ultérieurement.

On peut encore écrire les grandeurs de champ

$$\begin{aligned}\Omega &= \rho \cos \beta, \bar{\Omega} = -\rho \sin \beta, \quad J_0 = \rho e_0 \\ F &= \rho(\exp i\beta)e_1e_2 = -\bar{\Omega}e_3e_0 - i\Omega e_3e_0 \\ J_3 &= \rho e_3\end{aligned}$$

On définit ainsi deux vecteurs d'espace e et h , densités de moments électrique et magnétique, à savoir

$$e = -\bar{\Omega}e_3e_0, \quad h = -\Omega e_3e_0$$

La densité de spin est le vecteur d'espace

$$se_0 = \rho e_3e_0$$

La vérification des relations de Pauli-Kofink se fait sans difficulté et en comparant avec la théorie de Dirac, on obtient l'interprétation physique suivante

1° J_0 est le vecteur densité-flux, F la densité des moments électrique et magnétique par l'intermédiaire des vecteurs e et h après multiplication par le magnéton de Bohr B

$$B = \frac{e\hbar}{2m_0c} = \frac{e\hbar c}{2m}$$

et s est la densité de spin après multiplication par $\hbar/2$.

Ces densités doivent être intégrées dans l'espace pour obtenir les valeurs moyennes de la grandeur physique considérée. Ce sont ces intégrales qui ont un sens physique précis mais ce sont les densités qui ont les variances relativistes. En particulier la fonction d'onde doit être normée en intégrant la densité par rapport à la base fixe dans tout l'espace ce qui, avec la condition $D \cdot J_0 = 0$ qui sera démontrée assure la persistance de la normalisation au cours de l'évolution.

2° A la base propre nous associons les quatre vecteurs

$$J_\mu = \rho e_\mu$$

mais seuls J_0 et J_3 sont définis sous invariance de jauge. Nous calculerons leurs divergences en utilisant la méthode de la base propre fixée.

20

RÔLE DE L'ANGLE β .

Nous savons que, puisque $\Psi\tilde{\Psi} \neq 0$, la fonction d'onde Ψ , s'écrit d'une seule façon

$$\Psi = (\rho \exp i\beta)^{1/2}R \tag{20.1}$$

ρ étant la probabilité propre, R une rotation de Lorentz et β l'angle d'Yvon-Takabayasi. Le signe \sim indiquant que l'on renverse l'ordre dans le produit de vecteurs.

L'existence d'une base propre en tout point permet l'utilisation d'un repère propre fixe, choisi comme base des e_μ . Cette méthode, analogue à celles de Darboux, Frenet, E. Cartan, ne peut être envisagée aisément qu'en algèbre de Clifford.

Autre Forme de l'Équation d'Hestenes

Nous mettons (20.1) sous une forme qui nous sera utile pour simplifier nos calculs. En un point différent de 0 ($x \neq 0$) les vecteurs ϵ_μ de la base propre sont toujours définis par $\epsilon_\mu = R e_\mu \tilde{R}$, et nous noterons constamment avec l'indice 0 les valeurs des grandeurs physiques en 0. Nous posons avec $A = A_\mu e^\mu$

$$R = S \exp(e_2 e_1 a) \quad (20.2)$$

où a est un scalaire défini par $a = m x^0 \cos \beta_0 + e(A_\mu)_0 x^\mu$, et donc $a_0 = 0$ d'où

$$(e^\mu \partial_\mu a)_0 = (e^\mu \partial_\mu a) = m \cos \beta_0 e_0 + e e^\mu (A_\mu)_0 = m \cos \beta_0 e_0 + e A_0 \quad (20.3)$$

De $R\tilde{R} = 1$ on déduit $S\tilde{S} = 1$ et, comme $R = \bar{R}$ et $S = \bar{S}$ (parité) S est une rotation de Lorentz. Il existe, si $B^2 \neq 0$, un bivecteur B tel que $S = \exp B$. Donc il existe un bivecteur b de carré 1 et des scalaires θ et ψ tels que

$$S = (\operatorname{ch} \theta + b \operatorname{sh} \theta)(\cos \psi + ib \sin \psi)$$

De $R_0 = 1$ et de $a_0 = 0$ on déduit $S_0 = 1$, c'est-à-dire $\theta_0 = \Psi_0 = 0$ à 2π près. Comme S est la somme d'un scalaire S_1 , d'un bivecteur S_2 et d'un pseudoscalaire S_3 , $(\partial_\mu S_1)_0 = (\partial_\mu S_3)_0 = 0$, $(e^\mu \partial_\mu S_1)_0 = (e^\mu \partial_\mu S_3)_0 = 0$ si bien que $(e^\mu \partial_\mu S)_0 = (e^\mu \partial_\mu S_2)_0$. De même si $B^2 = 0$, comme on le voit.

Calculons maintenant $e^\mu \partial_\mu R$. On obtient avec (20.2)

$$(e^\mu \partial_\mu R) = (e^\mu \partial_\mu S) \exp e_2 e_1 a + e^\mu S (\partial_\mu a) e_2 e_1 \exp e_2 e_1 a \quad (20.4)$$

et, comme $\partial_\mu a$ est scalaire, il commute avec S . D'où

$$(e^\mu \partial_\mu R) \exp -e_2 e_1 a = e^\mu \partial_\mu S + m \cos \beta_0 e_0 S e_2 e_1 + e A_0 S e_2 e_1$$

et, en substituant ces résultats et définitions dans (20.1) on obtient

$$e^\mu \partial_\mu \left[\rho^{1/2} \left(\frac{\exp i\beta}{2} \right) S \right] = m\rho^{1/2} \frac{\exp -i\beta}{2} [(\exp i\beta) S e_0 - \cos \beta_0 e_0 S] e_2 e_1 \\ + e\rho^{1/2} (A - A_0) \left(\frac{\exp i\beta}{2} \right) S e_2 e_1 \quad (20.5)$$

équation (20.5) qui nous sera utile.

Solutions à Énergie Négative.

Une solution Ψ_- à énergie négative est solution de l'équation associée à (20.1)

$$e^\mu \partial_\mu \Psi_- = -m\Psi_- e_0 e_2 e_1 + eA\Psi_- e_2 e_1 \quad (20.6)$$

On peut poser

$$\Psi_- = i\Psi_+ \quad (20.7)$$

comme on le vérifie aisément, Ψ_+ étant solution de l'équation (20.1) d'Hestenes. On en conclut:

La multiplication par i d'une solution à énergie positive Ψ_+ fournit une solution à énergie négative Ψ_- de l'équation d'Hestenes.

En conclusion, nous voyons que la multiplication par i ne fait pas passer au complémentaire (ici, au positon) mais change seulement le signe de l'énergie sans changer la charge.

Positon.

On veut changer le signe devant e pour passer au complémentaire (ici, au positon). Soit ψ_+ une solution de l'équation

$$e^\mu \partial_\mu \psi_+ = m\psi_+ e_0 e_2 e_1 - eA\psi_+ e_2 e_1 \quad (20.8)$$

On peut établir un lien entre les solutions ψ_+ et Ψ_+ en posant

$$\psi_+ = \Psi_+ e_1 e_0 = \Psi_+ s_1$$

Substituons dans (20.8). On obtient

$$e^\mu \partial_\mu \Psi_+ e_1 e_0 = m \Psi_+ e_1 e_0 e_0 e_2 e_1 - e A \Psi_+ e_1 e_0 e_2 e_1$$

c'est-à-dire l'équation (20.1) pour Ψ_+ , en multipliant à droite par s_1 .

On en déduit, de la même façon que dans le cas précédent, que $\Psi_- i s_1$ est solution de (20.8), c'est-à-dire une solution de l'équation du positon avec une énergie opposée. D'où le résultat *en multipliant à droite par s_1 une solution à énergie positive ou une solution à énergie négative de l'équation (20.1) on obtient toujours une solution de l'équation (20.8) ou équation du positon.*

Interprétation de l'Angle β .

La multiplication par i qui change le signe de l'énergie comme on vient de le voir, correspond à un changement de β en $\beta + \pi$ car $i = \exp i\pi/2$. Il est donc naturel de chercher la signification de l'angle β . Pour cela nous déduisons de l'équation d'Hestenes une équation où figure la force de Lorentz agissant sur l'électron. On sait que, en 0, dans le système propre, la force de Lorentz est $e(e^\mu \partial_\mu A)_0 \cdot e_0$. Si l'électron avait toujours une masse propre m , l'équation fondamentale de la dynamique dans le système propre s'écrirait

$$e(e^\mu \partial_\mu A)_0 \cdot e_0 = m(\partial_0 \epsilon)_0 \text{ ou } \frac{e^-}{c^2} (e^\mu \partial_\mu A)_0 \cdot e_0 = m_0(\partial_0 \epsilon)_0$$

$(\partial_0 \epsilon)_0$ étant l'accélération en 0 pour $\rho_0 = 1$.

Nous ne devons pas nous attendre à une telle équation, ne serait-ce que parce que (20.1) admet des solutions à énergies négatives étroitement liée aux solutions à énergies positives comme on vient de le voir.

Prenons maintenant le gradient des deux membres de (20.5) et utilisons la méthode du repère propre fixé. Nous récrivons alors (20.5) après multiplication à droite par $e_1 e_2$, soit

$$B = C + D$$

avec

$$B = \left[e^\mu \partial_\mu \rho^{1/2} S \left(\frac{\exp i\beta}{2} \right) \right] e_1 e_2$$

$$C = m\rho^{1/2} \frac{\exp -i\beta}{2} [(\exp i\beta)S e_0 - (\cos \beta_0)e_0 S]$$

$$D = e\rho^{1/2}(A - A_0)\left(\frac{\exp i\beta}{2}\right)S$$

Nous prenons les gradients de B , C , D et les multiplions par $(\psi \exp i\beta/2)$ et, en 0:

$$(e^\mu \partial_\mu B)_0 \left(\frac{\exp -i\beta}{2}\right)_0 \rho_0^{-\frac{1}{2}} = [(e^\mu \partial_\mu C)_0 + (e^\mu \partial_\mu D)_0] \rho_0^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\exp -i\beta}{2}\right)_0 \quad (20.9)$$

i) Calcul de $(e^\mu \partial_\mu B)$

$$e^\mu \partial_\mu B = e^\mu \partial_\mu \left(e^\mu \partial_\mu \rho^{1/2} S \frac{\exp i\beta}{2} \right) e_1 e_2 = \square^2 \left(\rho^{1/2} S \frac{\exp i\beta}{2} \right) e_1 e_2$$

où \square^2 est le dalembertien, de telle sorte que

$$(e^\mu \partial_\mu B) \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\exp -i\beta}{2}\right)_0 = (\square^2 \rho^{1/2})_0 \rho_0^{-\frac{1}{2}} e_1 e_2 +$$

$$\frac{i}{2} (\square^2 \beta)_0 e_1 e_2 - \frac{1}{4} (e^\mu \partial_\mu \beta)_0^2 e_1 e_2 + (\square^2 S)_0 e_1 e_2$$

ii) Calcul de $(e^\mu \partial_\mu C)$

$$(e^\mu \partial_\mu C)_0 = m(e^\mu \partial_\mu \rho^{1/2} \frac{\exp -i\beta}{2})_0 i(\sin \beta_0) e_0 + m\rho_0^{1/2} \left(\frac{\exp i\beta}{2}\right)_0$$

$$[(e^\mu \partial_\mu \exp i\beta)_0 e_0 + (\exp -i\beta)_0 (e^\mu \partial_\mu S)_0 e_0 - (\cos \beta)_0 e^\mu e_0 (\partial_\mu S)_0]$$

Le crochet est pair si bien qu'après avoir développé le premier terme et multiplié à droite par $(\rho^{-1/2} \exp i\beta/2)_0$ on a, après avoir remplacé $(e^\mu \partial_\mu S)_0$ par son expression tirée de (20.5) où l'on a développé le premier membre et passé à la limite en 0 ce qui annule le terme en $A - A_0$,

$$\begin{aligned} (e^\mu \partial_\mu C)_0 \rho_0^{-1/2} \left(\frac{\exp -i\beta}{2} \right)_0 &= -\frac{1}{2} m(\cos \beta)_0 (e^\mu \partial_\mu \rho)_0 \rho_0^{-1} e_0 - \\ &\frac{1}{2} im(\cos \beta)_0 (e^\mu \partial_\mu \beta)_0 e_0 - m^2 (\exp -i\beta)_0 (\sin \beta)_0 e_3 e_0 - \\ &m(\cos \beta)_0 e^\mu e_0 (\partial_\mu S)_0 \end{aligned}$$

On transforme le dernier terme et on obtient

$$\begin{aligned} (e^\mu \partial_\mu C)_0 \rho_0^{-1/2} \left(\frac{\exp -i\beta_0}{2} \right) &= -m(\cos \beta_0) \rho_0^{-1} (\partial_0 \rho)_0 - im(\cos \beta_0) (\partial_0 e_0)_0 \\ &+ im^2 (\sin \beta_0) e_3 e_0 - 2m(\cos \beta_0) (\partial_0 S)_0 \end{aligned}$$

Il nous faudra calculer $(\partial_0 S)_0 \cdot e_0$. Or $\epsilon_0 = Re_0 \tilde{R} = Se_0 \tilde{S}$ d'où

$$(\partial_0 \epsilon_0)_0 = (\partial_0 S)_0 e_0 - e_0 (\partial_0 S)_0 = 2(\partial_0 S)_0 \cdot e_0 \quad (20.10)$$

iii) Calcul de $(e^\mu \partial_\mu D)$

$$(e^\mu \partial_\mu D) = e \rho^{1/2} (e^\mu \partial_\mu A) \left(\frac{\exp \rightarrow \beta_0}{2} \right) S + k(A - A_0)$$

k facteur convenable. D'où

$$(e^\mu \partial_\mu D)_0 \rho_0^{1/2} \left(\frac{\exp -i\beta_0}{2} \right) = (e^\mu \partial_\mu A)_0 e$$

iv) Nous formons alors (20.9) dont nous connaissons tous les termes mais en ne retenant que les bivecteurs. On obtient avec $\square = e^\mu \partial_\mu$

$$\begin{aligned} (\square^2 \rho^{1/2})_0 \rho_0^{-1/2} e_1 e_2 - \frac{1}{4} (e^\mu \partial_\mu \beta)_0^2 e_1 e_2 + \frac{i}{2} (\square^2 \beta)_0 e_1 e_2 + \\ [(\square^2 S)_0 e_1 e_2]_B = im^2 (\sin \beta)_0 e_3 e_0 - 2m(\cos \beta)_0 (\partial_0 S)_0 + e(e^\mu \partial_\mu A)_0 \end{aligned}$$

l'indice B désignant la partie bivectorielle du crochet.

Multiplions scalairement cette dernière équation par e_0 à droite, tenons compte de (20.10) et remarquons que

$$i e_3 e_0 \cdot e_0 = e_2 e_1 \cdot e_0 = 0$$

on obtient une équations qui ne contient plus la probabilité.

$$[(\square^2 S)_0 e_1 e_2]_B \cdot e_0 - \frac{1}{2} e_3 (\square^2 \beta)_0 = -m (\cos \beta)_0 (\partial_0 \epsilon_0)_0 + e (e^\mu \partial_\mu A) \cdot e_0 \quad (20.11)$$

Si on développe S sur la base des e_μ en ne conservant que la partie vectorielle après multiplication par e_0 , on trouve

$$p_0 e_1 + q_0 e_2 + r_0 e_3 = -m (\cos \beta)_0 (\partial_0 \epsilon_0)_0 + e (e^\mu \partial_\mu A)_0 \cdot e_0 \quad (20.12)$$

Redonnons à e et m leurs valeurs de définition. On obtient

$$\frac{\hbar}{c^2} (p_0 e_1 + q_0 e_2 + r_0 e_3) = -m_0 (\cos \beta)_0 (\partial_0 \epsilon_0)_0 + \frac{e^-}{c^2} (e^\mu \partial_\mu A) \cdot e_0 \quad (20.13)$$

Conclusions.

i) $p_0 = q_0 = r_0 = 0$.

Pour $\beta = 0$ l'équation (20.13) est celle de la dynamique relativiste pour un électron de masse propre m_0 et de charge e^- .

Pour $\beta = \pi$ (20.13) est l'équation relativiste pour une masse $-m_0$ et pour une charge e^- .

Pour $\beta \neq 0, \pi$, (20.13) est l'équation relativiste pour une masse propre $m \cos \beta$ et pour une charge e^- , si bien que β s'interprète comme séparant par $\cos \beta$ l'énergie propre en énergies de signes opposées pour un électron de charge e^- , ce qui était bien le but de notre recherche.

Nous dirons que le second membre de (20.13) égalé à 0 est l'équation de la dynamique relativiste généralisée.

- ii) Un au moins des p_0, q_0, r_0 est différent de zéro. Dans ce cas, le premier membre de (20.13) "mesure" en unités \hbar/c^2 l'écart entre les mécaniques quantique et relativiste généralisée.

Divergences

En utilisant la méthode de la base propre fixée on trouve pour les divergences des vecteurs courant

$$D \cdot J_\mu = -2m(\sin \beta) e_3 \cdot J_\mu + 2ei(e_3 \wedge e_0 \wedge J_\mu \wedge A_0)$$

Pour $\mu = 0$ on retrouve la condition de conservation de la normalisation puisque $D \cdot J_0 = 0$ et pour $\mu = 3$ la formule d'Uhlenbeck et Laporte relative à la divergence du vecteur de spin

$$D \cdot J_3 = 2m\rho \sin \beta.$$

21

LONGUEUR D'ONDE DE DE BROGLIE

Si Ψ est la fonction d'onde, l'équation de Hestenes s'écrit dans $R(1, 3)$ en l'absence de champ

$$e^\mu \partial_\mu \psi = m \psi e_0 e_2 e_1 \quad (21.1)$$

Let e^μ , tels que $e^\mu e_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$ et $e^0 = e_0$, $e^1 = -e_1$, $e^2 = -e_2$, $e^3 = -e_3$ sont les vecteurs de la base fixe du laboratoire, les ∂_μ sont les symboles de dérivation, ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $m = 2\pi m_0 c/h$ h et c ayant les significations habituelles et m_0 étant la masse propre de l'électron. On note $e_0 e_1 e_2 e_3 = i$ avec $i^2 = -1$.

Montrons que l'on peut déduire de l'équation d'Hestenes en l'absence de champ (21.1) l'équation relativiste de la fonction d'onde à une composante.

Multiplions les deux membres de (21.1) par $e^\mu \partial_\mu$. On obtient

$$(e^\mu \partial_\mu)(e^\mu \partial_\mu \psi) = m e^\mu \partial_\mu \psi \quad e_0 e_2 e_1 \quad (21.2)$$

soit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} - \Delta \psi = m^2 \psi (e_0 e_2 e_1)^2 \quad (21.3)$$

en tenant compte de (21.1), Δ est le laplacien.

Or $(e_0 e_2 e_1)^2 = (e_2 e_1)^2 = -1$ et (21.3) se réécrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi + m^2 \psi = 0 \quad (21.4)$$

Ici ψ est un nombre pair de Dirac à huit composantes réelles et (21.4) sépare les composantes, c'est-à-dire que chaque composante réelle vérifie (21.4) qui est ainsi l'équation relativiste de la mécanique ondulatoire à une fonction d'onde en l'absence de champ lorsque l'on considère les seules solutions réelles ou complexes de (21.4). En effet on réunit habituellement deux solutions réelles dans la solution complexe où i peut être l'imaginaire usuelle. Si C est constant

$$\psi = C \exp 2\pi \frac{i}{h} (Wt - px) \quad (21.5)$$

pour une onde monocinétique se propageant le long de Ox . Substituons (21.5) dans (21.4). On trouve la condition

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m^2 \frac{h^2}{4\pi^2} \quad (21.6)$$

W est donc l'énergie relativiste et $p = m_0/\alpha v$ l'impulsion, si bien que (21.6) se réécrit

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \quad (21.7)$$

relation que la relativité vérifie.

La longueur d'onde λ est définie comme la plus petite longueur qui redonne ψ à l'indentique au même instant t , c'est-dire que

$$\psi(x, t) = \psi(x - \lambda, t) \quad (21.8)$$

Cette condition reportée dans (21.5) conduit à

$$\lambda = \frac{h}{p} = h \frac{\alpha}{m_0 v} \quad (21.9)$$

avec $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$

Ce sont les formules de L. de Broglie, vérifiées expérimentalement.

L'introduction de la vitesse de phase c^2/v est tout à fait inutile car cette vitesse, étant supérieure à c , n'a aucune réalité physique mesurable, et ceci confère aux ondes de de Broglie un caractère spécifique à la fois objectif (longueur d'onde) et subjectif -ce que l'emploi de l'équation d'Hestenes permet d'éviter- en posant avec Louis de Broglie

$$\frac{m_0}{\alpha} c^2 = h\nu \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{c^2}{v\nu}$$

car on définit alors deux grandeurs, la fréquence ν et la vitesse de phase $u = c^2/v$ non mesurables et donc non objectives.

De Broglie va du subjectif à l'objectif et, en introduisant ainsi une part de subjectivité dans la physique théorique, il fonde la mécanique quantique. On ne peut en effet exiger de celle-ci qui utilise des espaces hermitiens ou de configuration, une adéquation permanente au réel mais seulement des résultats de mesure donc d'interaction si bien que son objectivité est alors totale.

On peut concevoir sans contradiction de très étranges géométries qui ont ainsi une existence logique sans aucune réalité physique. Il n'y a pas adéquation parfaite entre ces deux rationalités, l'une mathématique, l'autre physique, même si certaines créations abstraites d'espace ou d'algèbres sont ensuite employées en physique surtout quantique, car tout ce qui est rationnel n'est pas réel, ainsi une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Le réel physique est mesurable, observable. Il est donc objectif, absolu, mais notre connaissance est relative car ce qui est non mesurable, non décelable aujourd'hui peut devenir décelable ou mesurable demain.

C'est le réel lui-même qui est contradictoire et seules les mathématiques peuvent s'efforcer de lever la contradiction en calculant des éléments qui échappent à l'observation.

Lorsque l'on écrit $m_0 c^2 = h\nu_0$ on pose la contradiction comme réellement existante-ce fut l'intuition géniale de L. de Broglie- puisque l'on égale deux éléments antagonistes, l'un corpusculaire $m_0 c^2$, l'autre ondulatoire $h\nu_0$, ce qui permet de calculer fréquence et période qui sont inobservables. Les physiciens préfèrent dire que leur existence-calculée mais non observée-est virtuelle. (Voir plus loin).

Ces éléments virtuels, ces particules virtuelles existent-elles réellement? Notre connaissance reflète un réel contradictoire, elle est donc elle aussi contradictoire. On peut seulement affirmer que ces éléments, ces particules ont une existence logique.

1° Les formules (21.9), déduites de l'équation de D. Hestenes, s'appliquent à toutes les particules de spin $1/2$. Louis de Broglie a montré, en utilisant la formule fondamentale de la relativité, que (21.9) pouvait être étendue aux photons en mouvement ce qui prouvera la cohérence de la théorie. En effet si ν est la fréquence d'une onde monochromatique, l'énergie du photon en mouvement dans le vide est $h\nu$. Sa masse est donc $h\nu/c^2$ et son impulsion $h\nu/c$.

En portant dans (21.9) on obtient

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (21.10)$$

ce qui est bien la définition de la longueur d'onde pour une lumière monochromatique.

Ici tout est objectif car on peut non seulement mesurer la longueur d'onde mais aussi la fréquence, la vitesse de phase égale à la vitesse de propagation ou vitesse de groupe. Ce critère du tout objectif sépare les ondes lumineuses des ondes de matière, mais le caractère objectif de la longueur d'onde les réunit.

Le photon ayant un spin 1, la formule (21.9) est indépendante du spin et Louis de Broglie étend ainsi le résultat à toutes les particules élémentaires.

22

SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE HESTENES.

Ondes Planes

Nous écrivons l'équation en l'absence de champ

$$D\Psi = m\Psi e_0 e_2 e_1$$

les e_μ étant les vecteurs de la base fixe.

Ces solutions sont de la forme

$$\Psi = \rho^{1/2} u \exp e_2 e_1 p \cdot x$$

où ρ est constant et u une rotation constante de Lorentz, le vecteur constant p étant défini par

$$p = m u e_0 \tilde{u} = m e'_0 = p_\mu e^\mu$$

Vérifions cette proposition.

$$D\Psi = \rho^{1/2} e^\mu u \partial_\mu (\exp e_2 e_1 p \cdot x)$$

mais $p \cdot x = p_\mu x^\mu$, d'où

$$\partial_\mu (\exp e_2 e_1 p \cdot x) = p_\mu e_2 e_1 (\exp e_2 e_1 p \cdot x)$$

Il suffit maintenant de remarquer que p_μ qui est scalaire commute avec u pour écrire la condition

$$p u e_2 e_1 \exp e_2 e_1 p \cdot x = m \rho^{1/2} u (\exp e_2 e_1 p \cdot x) e_0 e_2 e_1$$

Or e_0 commute avec $e_2 e_1$ et en multipliant à droite par

$\exp -e_2 e_1 p \cdot x$ on trouve

$$p = m u e_0 \tilde{u}$$

ce qui est bien la condition annoncée.

Il existe aussi des ondes planes qui s'écrivent sous la forme

$$\Psi = \rho^{1/2} u i \exp -e_2 e_1 p \cdot x.$$

Par suite du changement de signe devant p ces ondes correspondent à la valeur $-m_0$ de la masse propre. Elles sont pour cela dites à énergies négatives et elles forment avec les ondes planes à énergies positives un système total, c'est-à-dire tel que l'on peut développer une solution quelconque de l'équation de D. Hestenes à l'aide d'un développement convenable d'ondes planes à énergies positives ou négatives.

Interprétation

Les énergies négatives sont inobservables mais l'observabilité est une notion physique, ce n'est pas une notion mathématique, et ce sont les mathématiques qui permettront seules de lever la difficulté car le sens d'écoulement du temps est subjectif, lié à l'observateur. Le réel physique ne le connaît pas si bien que l'on peut postuler un principe d'invariance du réel physique

dans le retournement à un instant donné-on pourrait dire statique- du seul axe temporel.

Or la densité de probabilité ρ est une composante temporelle et la relation de normalisation devient

$$\int \rho dr = -1$$

dr , élément de volume qui reste invariant dans le retournement du seul axe temporel. Masse ρm et charge ρe^- changent de signes et deviennent m_0 et e^+ , c'est-à-dire qu'il doit exister des positon observables. Ceci n'exclut pas l'existence d'états à énergies potentielle négatives, donc inobservables (effet tunnel par exemple).

Interférences

Nous superposons deux ondes planes et nous choisissons comme base propre celle d'une vibration, Ψ_1 par exemple d'où R_1 :

$$\Psi_1 = \rho_1^{1/2}, \Psi_2 = \rho_2^{1/2} R_2$$

avec $R_2 \tilde{R}_2 = 1$. Il en résulte une onde $\Psi = \rho^{1/2} R$ avec $R \tilde{R} = 1$, ce que l'on écrit

$$\begin{aligned} \rho &= (\rho_1^{1/2} + \rho_2^{1/2} R_2)(\rho_1^{1/2} + \rho_2^{1/2} \tilde{R}_2) \\ &= \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_1^{1/2} \rho_2^{1/2} (R_2 + \tilde{R}_2) \end{aligned}$$

Il existe un bivecteur $B = (\theta + i\varphi)b$ avec $b^2 = 1$ tel que $R_2 = \exp B$ et, comme on suppose que les ondes ont la même énergie, $\theta = 0$ et donc

$$\begin{aligned} R_2 + \tilde{R}_2 &= 2 \cos \varphi, \text{ d'où la formule} \\ &= \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_1^{1/2} \rho_2^{1/2} \cos \varphi \end{aligned}$$

ce qui est le cas des ondes

$$\Psi_1 = \rho_1^{1/2} \exp e_2 e_1 p \cdot x, \quad \Psi_2 = \rho_2^{1/2} \exp e_2 e_1 (p \cdot x + \varphi)$$

Remarque.

Pour des électrons libres faiblement accélérés la longueur d'onde de De Broglie est environ d'un angström (10^{-8} cm.) c'est-à-dire que sur un cm. il y a cent millions de longueurs d'onde. C'est plus qu'il n'en faut pour observer diffraction et interférences.

Nous montrerons que les électrons libres ne sont pas localisés c'est-à-dire qu'ils sont étendus dans l'espace, faiblement d'ailleurs, étant donnée la longueur d'onde.

Solutions Planes

Remarquons que l'équation aux valeurs propres de l'énergie s'écrit

$$(\partial_0 \Psi) e_1 e_2 = E \Psi$$

où E est l'énergie. Multiplions à droite par u , matrice unicolonne

$$(\partial_0 \Psi) e_1 e_2 u = E \Psi u$$

ce qui s'écrit avec $\Phi = \Psi u$ et $e_1 e_2 u = -i' u$

$$-i' \partial_0 \Phi = E \Phi$$

ce qui est bien pour la fonction d'onde spinorielle de Dirac l'équation aux valeurs propres de l'énergie, dans un état stationnaire.

Appelons $U e_0$ le potentiel scalaire produit par une charge électrique placée à l'origine des axes fixes e et cherchons des solutions de la forme

$$\Psi = L \exp e_2 e_1 E x_0$$

où L est un biquaternion qui ne dépend que des coordonnées d'espace.

L'équation de Hestenes se récrit

$$D\Psi = (m\Psi e_0 + U e_0 \Psi) e_2 e_1$$

et, après multiplication à gauche par e_0 , à droite par $\exp -e_2 e_1 E x_0$

$$\nabla L = [m e_0 L e_0 + (U - E)L] e_2 e_1$$

Décomposons L selon

$$L = M + iN$$

M et N étant deux quaternions et, après quelques calculs simples, l'équation précédente est remplacée par les deux équations

$$\begin{cases} \nabla M &= (m + E - U) N e_3 e_0 \\ \nabla N &= (m - E + U) M e_3 e_0 \end{cases}$$

Pour obtenir des solutions planes il suffit de poser

$$M = G(r) r^{1/2} f, \quad N = F(r) r^{1/2} e_3 e_0 u f$$

r étant le rayon-vecteur dans le plan $z = 0$, u étant le vecteur unitaire

$$u = e_1 e_0 \cos \varphi + e_2 e_0 \sin \varphi$$

porté par le rayon vecteur et f étant égale à $\exp e_2 e_1 j f$, j étant le nombre quantique interne qui ne prend que des valeurs demi-entières positives

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

En coordonnées polaires (r, φ) l'opérateur gradient s'écrit

$$\nabla = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

avec $v = -e_1 e_0 \sin \varphi + e_2 e_0 \cos \varphi$.

En substituant dans la décomposition de l'équation de Hestenes on obtient le système différentiel bien connu

$$\begin{cases} \frac{dG}{dr} - (j - \frac{1}{2}) \frac{G}{r} + (m + E - U) F = 0 \\ \frac{dF}{dr} + (j + \frac{3}{2}) \frac{F}{r} - (E - U - m) G = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre on utilise la méthode habituelle. Nous cherchons E positif et inférieur à m , nous posons

$$m + E = A^2, \quad m - E = B^2$$

avec A et B positifs. On cherche ensuite des solutions de la forme

$$\begin{aligned} F &= (\exp -ABr)(a_0 + a_1r + \dots a_p r^p)r^d \\ G &= (\exp -ABr)(b_0 + b_1r + \dots b_p r^p)r^d \end{aligned}$$

avec d réel ainsi que les a et b . De plus on impose à M et N qui sont nulles à l'infini de l'être aussi à l'origine. Enfin on pose

$$U = -\frac{Zee^-}{r} = -\frac{Z\alpha}{r}$$

Z étant le numéro atomique et α la constante de structure fine peu différente de $(137)^{-1}$

En substituant dans le système des équations différentielles on trouve

$$d = -1 + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}$$

et des relations de récurrence qui permettent de déterminer de proche en proche les a et b à un facteur près qui sera ultérieurement normalisation. On obtient ainsi les niveaux d'énergie avec structure fine

$$E = m \left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(p + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2} \right]^{-1/2}$$

le quantum total étant $n = p + j + 1/2$.

On peut se borner pratiquement aux deux premiers termes du développement, si bien que l'on obtient dans l'état fondamental ($n = 1, j = 1/2$) la valeur $E(1)$ de l'énergie

$$E(1) = RZ^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}Z^2\right)$$

R étant la constante de Rydberg.

Probabilité

Calculons la probabilité propre pour les solutions planes $\rho \exp i\beta = \Psi \tilde{\Psi} = r(G + iF e_3 e_0 u)(G - iF e_3 e_0 u) = (G^2 - F^2)$ donc $\rho \sin \beta = 0$, d'où $\beta = 0$ (ρ positif). On pose

$$G = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/2} \operatorname{ch} \frac{\theta}{2}, F = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/2} \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}$$

et pour la vitesse d'univers

$$e'_0 = e_0 \operatorname{ch} \theta - v e_0 \operatorname{sh} \theta$$

Il en résulte que la vitesse réduite est en valeur absolue $|\operatorname{th} \theta|$ et que la condition de normalisation dans la base fixe s'écrit comme dans le formalisme usuel

$$1 = \int_0^{+\infty} r(G^2 + F^2) dr$$

ce qui correspond dans cette base fixe à une probabilité qui ne s'annule jamais.

Moments Cinétiques.

La planéité des solutions précédentes permet de calculer le moment cinétique orbital et d'intégrer dans tout le plan tout au moins à l'approximation non relativiste, c'est-à-dire en négligeant F^2 devant G^2 . On obtient pour ce moment

$$\hbar\left(j + \frac{1}{2}\right)e_3 e_0$$

Le moment cinétique total se détermine en ajoutant ou en retranchant $\hbar/2$ suivant le sens du spin. On peut alors quantifier dans l'espace les différentes directions possibles des plans orbitaux en considérant $e_3 e_0$ comme une direction distinguée telle que les projections des moments totaux précédents sur $e_3 e_0$ soient encore des multiples entiers de \hbar .

En désignant par a l'angle du plan avec le plan $z = 0$ et par m' un entier augmenté de $1/2$

$$\cos a = \frac{m'}{(l+1)}$$

avec les cas possibles $j = l \pm 1/2$ ce qui s'écrit encore $\cos a = m'/j$ et $\cos a = m'/(j+1)$

La condition $|m'| \leq j$ redonne la règle de Stoner. On retrouve également la formule de Landé relative à la variation d'énergie introduite par un faible champ magnétique.

Etats Fondamentaux.

Pour l'hélium et plus généralement pour les atomes $Z - 2$ fois ionisés $j = 1/2$ et donc $l = 0$ et $l = 1$ si bien le premier des électrons est dans le plan $z = 0$ et le second dans le plan $\cos a = 1/3$. Les forces d'interaction seront minimisées, c'est-à-dire que les électrons seront supposés aussi loin que possible sur leurs orbites théoriques. Un calcul facile montre alors que l'énergie est

$$E = 2 \left(Z - \sqrt{\frac{6}{8}} \right)^2 E_h$$

E_h étant le fondamental de l'hydrogène pris ici à $13,605 \text{ eV}$ si bien que $E = 78,07 \text{ eV}$, légèrement inférieure à la valeur observée.

Le calcul peut se poursuivre pour les atomes $Z - 3, Z - 4, \dots$ fois ionisés avec de bons résultants (voir Comptes - Rendus, série B, 1972).

Solutions Sphériques.

Des solutions sphériques ont été données pour l'équation de David Hestenes par Roger Boudet (Comptes-Rendus 1974, série A, page 1064)

avec un angle β non nul, puis, plus tard, par Krüger avec un angle β égal à zéro partout.

Dans les solutions de M. Boudet le calcul montre que β est de l'ordre de la vitesse réduite de telle sorte que, à l'approximation non relativiste, la masse est partout m et non $m \cos \beta$, résultat d'ailleurs sans influence sur les valeurs propres de l'énergie qui ne dépendent pas de l'angle β .

23

MILIEU SUBQUANTIQUE

Les noyaux des atomes sont formés de protons et de neutrons. C'est ainsi que le phosphore comprend 15 protons et 17 neutrons. Comment ces protons et ces neutrons tiennent-ils ensemble?

- 1° On peut songer à la gravitation mais en supposant les particules jointives avec leurs dimensions usuelles, le calcul fournit des forces extrêmement faibles, ce qui les rend indécélables.
- 2° On peut songer aux forces électriques, mais les protons divergent puisqu'ils ont même charge, ce qui ne convient pas du tout.
- 3° Il faut donc qu'il existe des forces spéciales, dites forces nucléaires, qui emprisonnent protons et neutrons et qui sont donc très fortes à l'intérieur des noyaux et très faibles à l'extérieur puisque l'on ne peut les déceler que dans des réactions atomiques dont les effets peuvent être dévastateurs.

Mais ces forces ne peuvent exister sans avoir un support un agent. Les forces gravitationnelles existent avec les masses, les forces électriques existent avec les charges, les forces nucléaires ne peuvent rester en l'air, sans soutien. C'est pourquoi les physiciens ont imaginé des pions et des photons virtuels inobservables. Le calcul du potentiel de Yukawa va nous permettre de préciser cette idée.

23.1 Potentiel de Yukawa

De l'équation en l'absence de champ

$$D\Psi = m\Psi e_0 e_2 e_1$$

on déduit

$$D^2\Psi = m^2\Psi (e_0 e_2 e_1)^2$$

et pour un potentiel statique à symétrie sphérique

$$\Delta\Psi = m^2\Psi$$

Si Ψ est à symétrie sphérique et de rayon ρ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}$$

Dès lors, les solutions générales réelles sont

$$\Psi = \frac{A}{\rho} \exp -m\rho + \frac{B}{\rho} \exp m\rho$$

A et B constantes réelles.

Pour ρ infini la solution doit être évidemment nulle, d'où $B = 0$. Ce potentiel est donc

$$\Psi = \frac{A}{\rho} \exp -m\rho = \frac{A}{\rho} \exp -m_0 c \frac{\rho}{\hbar}$$

C'est le potentiel de Yukawa que l'on interprète comme le potentiel de forces nucléaires qui agissent à l'intérieur des noyaux et assurent leur

stabilité, et qui par conséquent deviennent très faibles à l'extérieur des noyaux

Si m_0 représente alors la masse des pions, soit 270 fois celle de l'électron, on obtient en CGS en prenant pour ρ'_0 rayon des gros noyaux, 10^{-12} cm., $m_0c/\hbar\rho_0 = 7$, sensiblement et pour le facteur exponentiel une valeur très faible 10^{-3} environ ce qui signifie que dès que $\rho > \rho_0$ la force est divisée par 10^3 . Par rapport à celle qui agit au centre ($\rho = 0$).

Nous avons dit que la vitesse de phase c^2/v et la fréquence n'ont qu'une existence subjective, c'est-à-dire non objectivement mesurable. Posons $T = 1/y$. Le pion, émis puis absorbé, qui supporte la force nucléaire pendant ce laps de temps, n'est pas observable puisqu'il y a conservation de l'énergie. Si donc on admet que le processus se déroule pendant un temps très court, inférieur à T , il sera inobservable. Or T est calculable

$$T = \frac{h}{m_0c^2} = 3 \cdot 10^{-23} s.$$

Enfin si $m_0 = 0$ le corpuscule est un photon et le potentiel de Yukawa devient le potentiel coulombien ainsi transmis à l'intérieur de l'atome par des photons inobservables ou virtuels puisque leur temps de parcours est alors de 10^{-12} cm. divisé par leur vitesse, soit $3,33 \cdot 10^{-23}$ s.

Les pions et les photons virtuels ont donc une existence logique rationnelle mais inobservable. Ils constituent un milieu subquantique. La mécanique quantique fixe elle même ses propres limites. Certains auteurs ont imaginé que ce milieu subquantique était à la fois chaotique, agissant dans toutes les directions et déterminé si bien que l'indéterminisme quantique ne serait que la conséquence d'un déterminisme subquantique. Cette conséquence leur paraît plus conforme à l'idéal de la science.

“Dieu ne joue pas aux dés”, disait Einstein.

Nous en déduisons une tout autre conséquence car nous estimons que l'Univers est incréé, a toujours existé, et que son évolution doit pouvoir s'expliquer sans intervention extérieure. Cette évolution suppose que, il y a deux milliards d'années, la vie est apparue sur la Terre et que, par mutations successives, l'évolution a conduit jusqu'à l'homme moderne. Cette évolution apparaît aujourd'hui comme certaine mais inexplicée. Cette

apparition de la vie, ces sauts dialectiques paraissent de la magie. Par contre s'il existe des processus virtuels qui rendent ces sauts possibles, comme les pions virtuels rendent possible la création de forces nucléaires aux effets dévastateurs, la magie disparaît, l'apparition de la vie est concevable tout en restant parfaitement aléatoire, ce qui explique l'échec de toutes les expériences en laboratoire entreprises à ce sujet, car l'on ne peut jamais savoir si les processus physiques nécessaires au succès ont été intégrés dans l'expérience elle-même puisqu'ils sont virtuels donc inobservables. C'est, dira-t-on, la porte ouverte à toutes les parasciences, mais ce n'est pas parce qu'une porte est ouverte qu'on a le droit d'entrer.

Les mutations successives des êtres vivants s'expliqueraient de la même façon. Les processus virtuels seraient physiques. Pourraient-ils être aussi biologiques? Nous n'avons pas de réponse sûre à cette question, car si le calcul et le potentiel de Yukawa fournissent une explication suffisante de l'existence des pions virtuels la biologie reste une science soumise à l'expérience et à l'expérimentation, les mathématiques n'ont pas aujourd'hui une prise suffisante sur elle.

24

NON LOCALISATION DES ÉLECTRONS LIBRES

Il nous reste à montrer que la mécanique quantique est une théorie complète et que le milieu subquantique est sans influence sur la non localisation des électrons libres. Cette mécanique rend compte de toute la réalité observable, il n'y a pas de variables cachées. Ses limites ne sont que celles de l'observation.

Introduction.

Nous rappelons l'équation d'Hestenes pour l'électron écrite dans l'algèbre de Clifford de l'espace-temps de Minkowski

$$e^\mu \partial_\mu \Psi = m \Psi e_0 e_2 e_1 + e A \Psi e_2 e_1 \quad (24.1)$$

Les e sont les vecteurs de base, $A = A^\mu e_\mu$, $\partial = \partial/\partial x^\mu$ les dérivées, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $e^0 = e_0$, $e^1 = -e_1$, $e^2 = -e_2$, $e^3 = -e_3$, $e^\mu e_\nu + e_\nu e^\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, x étant l'instant-point $x = x^\mu e_\mu = x_\mu e^\mu$, $i = e_0 e_1 e_2 e_3$ et $i^2 = -1$, e

et m étant reliés à la masse propre m_0 et à la charge e^- par $m\hbar = m_0c, e\hbar c = e^-, c$ vitesse de la lumière et \hbar constante réduite de Planck.

Nous savons que la fonction Ψ s'écrit

$$\Psi = (\rho \exp i\beta)^{1/2} R$$

ρ étant la probabilité normée comme d'usage, R étant une rotation de Lorentz et β étant l'angle d'Yvon-Takabayasi. Dans le cas d'une onde plane monochromatique, c'est-à-dire dans le cas d'un flux d'électrons de même vitesse, la fonction d'onde Ψ s'écrit

$$\Psi = p^{1/2} u \exp e_2 e_1 p \cdot x \quad (24.2)$$

avec ρ constant, $\beta = 0$ et u rotation constante de Lorentz. De plus $p = m u e_0 \tilde{u}$, le signe \sim indiquant que l'on renverse l'ordre dans les produits de vecteurs.

Champs Magnétiques

1° Nous cherchons des solutions de la forme (Thèse, Paris VI, 1971)

$$\Psi(x) = p(x)^{1/2} \exp e_2 e_1 p \cdot x \quad (24.3)$$

où ρ est une fonction de x et où $p = m e_0$.

Nous substituons (24.3) dans (24.1) et nous multiplions à droite par $\exp -e_2 e_1 p \cdot x$. On obtient

$$\frac{1}{2}(e^\mu \partial_\mu \rho) + \rho p e_2 e_1 = m \rho e_0 e_2 e_1 + e A \rho e_2 e_1$$

Mais $p e_2 e_1 = m e_0 e_2 e_1$ et l'équation se réduit à

$$e^\mu \partial_\mu \rho = 2e A \rho e_2 e_1 \quad (24.4)$$

si bien que

$$e^\mu \partial_\mu \rho = 2e \rho A e_2 e_1 = 2e \rho (A^0 e_0 e_2 e_1 + A^1, e_2 - A^2 e_1 + A^3 e_3 e_2 e_1)$$

Comme $e^\mu \partial_\mu \rho$ est un vecteur, on écrit les conditions nécessaires et suffisantes, $A^0 = A^3 = 0$ et le système différentiel

$$\partial_0 \rho = \partial_3 \rho = 0, \quad \partial_1 \rho = 2e\rho A^2, \quad \partial_2 \rho = -2e\rho A^1 \quad (24.5)$$

2° Nous considérons dans toute la suite un champ magnétique d'espace

$$\vec{H} = H e_3 e_0$$

constant, normal au plan de la fonction d'onde et agissant à l'intérieur d'un cylindre de révolution d'axe Ox_3 de rayon R , tandis qu'il est nul partout ailleurs. Nous posons

$$A^2 = \frac{H}{2} x^1, \quad A^1 = \frac{H}{2} x^2 \quad (24.6)$$

On écrit alors (24.5) sous la forme

$$\partial_1 \rho = e\rho H x^1, \quad \partial_2 \rho = e\rho H x^2 \quad (24.7)$$

c'est-à-dire

$$\partial_1 \ln \rho = eH x^1, \quad \partial_2 \ln \rho = eH x^2$$

\ln , logarithme népérien.

La première équation (24.7) s'intègre avec

$$\ln \rho = \frac{eH(x^1)^2}{2} + f(x^2)$$

$f(x^2)$ étant une fonction dérivable de x^2 . En utilisant la seconde

$$\partial_2 \ln \rho = \frac{df(x^2)}{dx^2}$$

et, toujours avec (24.7),

$$\frac{df(x^2)}{dx^2} = eH x^2$$

d'où

$$f(x^2) = \frac{eH(x^2)^2}{2+k} \quad (k, \text{ constante})$$

Rapprochons

$$\ell n \rho = \frac{eH[(x^1)^2 + (x^2)^2]}{2 + k}$$

Posons pour le rayon vecteur dans un plan perpendiculaire à Ox^3

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$$

on obtient

$$\ell n \rho = \frac{eHr^2}{2 + k}$$

Désignons par ρ_0 la densité de probabilité sur l'axe ($r = 0$)

$$\ell n \rho_0 = k$$

et en éliminant k

$$\rho = \rho_0 \exp \frac{eH}{2} r^2 \quad (24.8)$$

Comme eH est négatif, la formule (24.8) induit une répartition de Gauss sur le détecteur. C'est à partir de (24.8) que nous allons déduire l'impossibilité de la localisation des électrons libres dans leur onde.

- 1° On remarque que ρ est indépendant du rayon R du cylindre (). On prendra donc R aussi grand que l'on veut et l'on remarque que la répartition est acquise dès que l'onde plane est au contact du champ H . On suppose les électrons localisés dans l'onde plane et l'on démontre que cette hypothèse conduit toujours à une contradiction avec la formule (24.8) qui n'est possible que si un électron au moins, localisé en un point extérieur à l'axe, est rejeté immédiatement sur l'axe.
- 2° L'électron localisé en un point du plan P suit la dynamique de Lorentz. La force agissant sur lui est alors nulle puisque la vitesse est toujours colinéaire au champ quel que soit le point M du cylindre où s'exerce le champ. L'électron suit donc une parallèle à Ox_3 mais ce raisonnement ne peut suffire car les mécaniques corpusculaires modernes (Bohm, Vigier) imaginent qu'un milieu subquantique, entièrement déterminé mais inobservable, agit sur l'électron d'une façon chaotique, provoquant des sauts quantiques dans toutes

les directions, ce qui induit l'indéterminisme quantique observable. Ces sauts, déterminés mais imprévisibles, doivent se passer dans le plan P lui-même puisque la formule (24.8) est vraie dès que l'électron a quitté le plan P . Louis de Broglie qui expose les thèses de Bohm-Vigier, écrit

“Si l'on admet cette hypothèse et si l'on suppose que les perturbations aléatoires subies par le corpuscule sont représentables par l'apparition momentanée dans l'équation des ondes de petits potentiels perturbateurs, l'équation de continuité doit rester valable, même dans les périodes de perturbation et la grandeur $\rho d\tau$ ($d\tau$, élément de volume) restera constante le long d'un tube de courant, même dans ses portions perturbées où il ne coïncide plus avec l'écoulement hydrodynamique régulier. Alors un même élément $d\tau$ passera constamment d'un tube de courant non perturbé à un autre tube de courant non perturbé voisin avec conservation de $\rho d\tau$.”

Le premier passage à un tube de courant voisin a lieu dans le plan P et il est physiquement limité d'une manière évidente par une distance maximum d , qui est faible car les tubes sont voisins.

On choisit $R = 2d + k$ (k réel positif quelconque). Soit dans le plan P un point A tel que $OA = R - d > d$.

3° Si l'électron est localisé entre O et A , tout le milieu agissant sur lui est à l'intérieur d'un cylindre de rayon d intérieur à (C) .

Par symétrie le saut quantique possible de l'électron ne peut connaître aucune direction privilégiée si bien qu'aucun saut quantique n'est effectif et que l'électron suit en conséquence une parallèle à Ox_3 .

4° L'électron est localisé en B tel que $OB > R - d$, ce qui introduit une dissymétrie dans l'action du milieu.

- a) L'électron suit la dynamique relativiste et par conséquent une parallèle à l'axe en contradiction avec la formule (24.8).
- b) L'électron suit les mécaniques corpusculaires modernes. Alors il peut sauter d'une ligne de courant à une autre mais cette action est tou-

jours limitée par d , si bien qu'il peut seulement atteindre un point C tel que $OC = OB - d > k$.

Conclusion.

Soit (C') le cylindre de rayon k et d'axe Ox_3 . Nous avons prouvé qu'il ne pouvait recevoir immédiatement aucun électron qui lui serait extérieur. Il se formera donc sur le détecteur une plage circulaire centrée sur l'axe et de rayon k où la répartition restera uniforme, ce qui est en contradiction avec la forme (24.8). Nous en concluons que les électrons ne peuvent pas être considérés comme localisés dans l'onde plane. Ici encore c'est l'intervention du détecteur qui provoque la localisation (intervention de l'appareil de mesure mis en place) mais ceci ne signifie pas que le milieu subquantique n'existe pas.

Il est certain que les pions virtuels qui assurent la stabilité des noyaux, que les photons virtuels qui transportent l'électricité des noyaux aux électrons périphériques, créent un milieu subquantique inobservable.

- 1° La non-localisation des corpuscules résulte de la formule (24.8), c'est-à-dire de la mécanique quantique, toujours en accord avec l'expérience et cette propriété doit être considérée comme démontrée.
- 2° Toute théorie comporte une certaine part de subjectivité mais le réel physique, lui, est totalement objectif: ou bien les corpuscules sont localisés avant le choc ou bien ils ne le sont pas, c'est-à-dire qu'ils sont étendus dans l'espace, faiblement d'ailleurs, c'est la double nature de l'électron .
- 3° Pour A. Einstein, Dieu ne joue pas aux dés. Il doit donc exister une théorie plus complète que la mécanique quantique restituant à l'électron une trajectoire déterminée. Les physiciens qui ont imaginé un milieu subquantique ont voulu rétablir un déterminisme dont l'absence leur paraissait incompatible avec l'idéal de la science. En étudiant l'action du milieu subquantique sur la localisation de l'électron nous avons montré que ce milieu était sans influence sur cette non localisation. La mécanique quantique est une théorie complète. Dieu, s'il existe, joue sûrement aux dés, tout au moins avec les électrons libres.

25

THEORIE RELATIVISTE DU NUCLEON ET DU DOUBLET Ξ

Introduction.

Nous rappelons l'équation de Dirac-Hestenes pour l'électron, écrite dans l'algèbre de Clifford

$$\square\psi = m\psi\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + eA\psi\gamma_2\gamma_1 \quad (25.1)$$

Les γ sont les vecteurs de la base fixe choisie, $\square = \gamma^\mu\partial_\mu$ le gradient, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ les symboles de dérivation, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $\gamma^\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu}$ (Kronecker), tandis que $\gamma^0 = \gamma_0, \gamma^1 = -\gamma_1, \gamma^2 = -\gamma_2, \gamma^3 = -\gamma_3$, que $i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ($i^2 = -1$), e et m étant reliés à la charge et à la masse propre.

Nous savons que, puisque $\psi\tilde{\psi} \neq 0$, la fonction d'onde ψ , nombre pair de Dirac, s'écrit univoquement

$$\psi = (\rho \exp i\beta)^{1/2}Q \quad (25.1bis)$$

ρ étant la probabilité propre normée, comme d'usage. Q une rotation de Lorentz et β l'angle d'Yvon-Takabayasi, x étant l'instant point et le signe \sim indiquant que l'on renverse l'ordre dans tous les produits de vecteurs.

L'équation (25.1) possède l'invariance relativiste c'est-à-dire qu'elle conserve la même forme dans une rotation de Lorentz. Si en effet $x = x_0$ est un point quelconque, Q devient $Q(x_0)$ que l'on notera $Q(0)$ ou Q_0 . Remplaçons dans (25.1) $\psi(x)$ par $\psi'(x)Q_0$. Alors

$$\begin{aligned} \square[\psi'(x)Q_0] &= [\square\psi'(x)]Q_0 = m\psi'(x)Q(0)\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + \\ &eA\psi'(x)Q_0\gamma_2\gamma_1 \end{aligned}$$

et, en multipliant à droite par $\tilde{Q}(0)$, on obtient

$$\square\psi'(x) = m\psi'(x)e'_0e'_2e'_1 + eA\psi'(x)e'_2e'_1$$

qui a la même forme en posant $e'_\mu = Q_0\gamma_\mu\tilde{Q}_0$, les e'_μ sont les vecteurs de la base propre en x_0 puisque la fonction d'onde est alors

$$\psi'(0) = (\rho \exp i\beta)_0^{1/2} = \psi(0)\tilde{Q}(0)$$

L'équation (25.1) est mathématiquement équivalente à l'équation de Dirac écrite sous forme matricielle (II). En 1939 J. Yvon avait donné une forme tensorielle de l'équation de Dirac et introduit l'angle β de la même façon qu'en algèbre de Clifford. En 1947, Takabayasi, après une longue étude, est presque parvenu à la structure de Clifford de l'équation de Dirac et a introduit également l'angle β

Nucléon

Equation de Nucléon

C'est l'équation

$$\begin{aligned} \square\Phi(x) &= m\Phi(x)e_0e_2e_1 + eA\Phi(x)(\exp is_1\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2})e_2e_1 + \\ &g\Phi(x)P^\mu e_\mu i \end{aligned} \tag{25.2}$$

où $\Phi(x)$ est la fonction d'onde, e_μ les vecteurs de la base propre au point $x = x_0$ du proton associé par (25.6), θ un angle qui décrit les proportions du mélange, g un coefficient positif, $P^\mu e_\mu$ le champ pionique de composantes invariantes dans un changement de base qui s'écrivent ce qui sera ensuite justifié

$$P^0 = P^1 = 0, P^2 = \frac{dm}{2g} \sin \theta, P^3 = -\frac{dm}{g} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

De plus, $\Phi(x)$ est un nombre pair de Dirac, $s_1 = e_1 e_0$.

Enfin e et m son reliés à la masse propre m_0 et à la charge e^+ du proton tandis que dm est relié à la différence propre dm_0 neutron/proton, car

$$m = m_0 \frac{c}{\hbar}, e = \frac{e^+}{\hbar c}, dm = (dm_0) \frac{c}{\hbar}$$

\hbar étant la constante réduite de Planck et c la vitesse de la lumière.

L'équation (25.2) possède l'invariance relativiste comme on le voit en remplaçant $\Phi(x)$ par $\Phi'(x)R(0)$ en prenant pour $R(0)$ une rotation fixe de Lorentz, puisqu'il suffit de remplacer les e_μ par les $\varepsilon_\mu = R(0)e_\mu \tilde{R}(0)$ pour obtenir une équation de la même forme.

Equation du Proton.

Il faut associer à l'équation (25.2) l'équation (25.3) relative au proton, de fonction d'onde $\phi_+(x)$ qui vérifie dans la base fixe des γ_μ une Dirac-équation

$$\square \phi_+(x) = m \phi_+(x) \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 + e A \phi_+(x) \gamma_2 \gamma_1 \quad (25.3)$$

Le nombre pair de Dirac, $\phi_+(x)$, ou biquaternion, peut se mettre unequivoquement sous la forme

$$\phi_+(x) = (r \exp i\beta)^{1/2} S \quad (25.4)$$

S étant une rotation de Lorentz, r la probabilité propre normée par $r = \rho \cos^2 \theta/2$ et ρ la probabilité propre du nucléon normée à l'unité.

Nous interprétons physiquement (25.2) et (25.3) au point $x = x_0$ et nous récrivons (4) sous la forme

$$\phi_+(x) = (\rho \exp i\beta)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} S(x) \quad (25.5)$$

Nous posons $e_\mu = S(0)\gamma_\mu\tilde{S}(0)$. Au point $x = x_0$, (25.3) devient après multiplication à droite par $\tilde{S}(0)$, et les e_μ étant la base propre du proton au point $x = x_0$

$$[\square\phi_+(x)\tilde{S}(0)]_0 = m\phi_+(0)\tilde{S}(0)e_0e_2e_1 + eA_0\phi_+(0)\tilde{S}(0)e_2e_1 \quad (25.6)$$

Invariance de Jauge

Dans l'équation (25.2) la présence du champ pionique interdit l'invariance de jauge par suite de la présence de la composante P^2 qui est différente de zéro. Par contre il y a invariance de jauge pour l'équation (25.3) de Dirac relative au proton. C'est donc sous invariance de jauge que sont définies la probabilité ρ , l'angle de Takabayasi β et la base propre du proton définie par les vecteurs e_μ .

Equation du Neutron

Nous prenons pour la fonction d'onde du neutron

$$\phi_0(x) = -(\rho \exp i\beta)_0^{1/2} \sin \frac{\theta(0)}{2} i s_1 C_0(x) \quad (25.7)$$

avec $s_1 = e_1e_0$. Le neutron vérifie dans la base des e_μ , base propre du proton, une équation de Dirac en l'absence de champ, $C_0(x)$ étant un nombre pair de Dirac.

$$\square\phi_0(x) = \phi_0(x)(m + dm)e_0e_2e_1 \quad (25.8)$$

Nous prenons $C_0(0) = 1$ en choisissant avec $s_3 = e_3e_0$

$$C_0(x) = (\exp i\beta)_0^{1/2} \left[\cos \frac{\beta_0}{2} (\exp i s_3(p \cdot (x - x_0))) \right. \\ \left. + \sin \frac{\beta_0}{2} i (\exp i s_3(p \cdot (x - x_0))) \right]$$

et $p = (m + dm)e_0$. Pour $x = x_0$, $C_0(x_0)$, noté $C_0(0)$ égale 1. Alors

$$\phi_0(x) = -\rho_0^{1/2} \sin \frac{\theta(0)}{2} i s_1 \left[\cos \frac{\beta_0}{2} (\exp i s_3(p \cdot (x - x_0))) + \right. \\ \left. i \sin \frac{\beta_0}{2} \exp -i s_3(p \cdot (x - x_0)) \right]$$

si bien que $i s_1 \exp i s_3(p \cdot (x - x_0))$ et $i s_1 \exp i s_3(p \cdot (x - x_0))$ sont solutions de (25.8). Ainsi

$$\square [i s_1 \exp i s_3(p \cdot (x - x_0))] = p i s_1 i s_3 \exp i s_3(p \cdot (x - x_0))$$

soit

$$-pe_1e_0e_3e_0 = (m + dm)is_1e_0e_2e_1 = (m + dm)e_0e_1e_3$$

ce qui est vrai.

Fonctions d'Onde du Nucléon

Nous prenons $\phi(x) = \phi_+(x)\tilde{S}_0 + \phi_0(x)$ si bien que

$$\phi(0) = (\rho \exp i\beta)_0^{1/2} \left(\exp -is_1 \frac{\theta(0)}{2} \right)$$

Pour retrouver l'équation (25.2) du nucléon, nous additionnons (25.6) et (25.8), nous tenons compte de l'expression précédente de $\Phi(x)$ et nous remplaçons $(\rho \exp i\beta)_0^{1/2}$ par $\Phi(0) \exp is_1\theta(0)/2$. On vérifie que

$$g\Phi(0)Pi = \phi_0(0)e_0e_2e_1(dm)$$

si bien que l'équation (25.2) est ainsi justifiée, au point $x = x_0$.

Les grandeurs de champ réelles sont définies comme en théorie de Dirac par $\Phi(0)\tilde{\Phi}(0)$, $\Phi(0)e_0\tilde{\Phi}(0)$ et $\Phi(0)e_3\tilde{\Phi}(0)$.

Probabilités.

A partir de $\Phi(0)\tilde{\Phi}(0) = \rho_0 \exp i\beta_0$, on déduit que $\|\Phi(0)\tilde{\Phi}(0)\| = \rho_0$ est la probabilité propre du nucléon, celle du proton est $r_0 = \rho_0 \cos^2 \theta(0)/2$ est celle du neutron est

$$\|\phi_0(0)\tilde{\phi}_0(0)\| = \rho_0 \sin^2 \frac{\theta(0)}{2}$$

Base Propre du Nucléon

Cette base ϵ_μ est définie par

$$\epsilon_\mu = \left(\exp -is_1 \frac{\theta(0)}{2} \right) e_\mu = \left(\exp is_1 \frac{\theta(0)}{2} \right)$$

Comme e_0 et e_1 commutent avec is_1 , $\epsilon_0 = e_0$, $\epsilon_1 = e_1$ mais ϵ_2 et ϵ_3 se déduisent de e_2 et de e_3 dans une rotation de θ_0 autour du vecteur d'espace e_1e_0 .

Vitesse d'Univers.

La vitesse d'univers du nucléon est

$$\Phi(0)e_0\tilde{\Phi}(0) = \rho_0e_0$$

Isospin.

Comme la théorie de Dirac introduit le spin, la théorie de nucléon introduit automatiquement l'isospin

$$I_3 \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_0 e_3 \tilde{\Phi}(0) \quad \text{et} \quad I(\text{isospin}) = -I_3 \cdot e_3$$

c'est-à-dire que si I_3 est la direction d'isospin obtenue en faisant tourner $1/2e_3$ de $\theta(0)$ autour de e_1 , l'isospin est la projection sur e_3 du vecteur ainsi obtenu. En effet

$$I_3 = \frac{1}{2}\rho_0 \exp\left(-\frac{is_1\theta(0)}{2}\right)e_3 \exp\left(\frac{is_1\theta_0}{2}\right)$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\rho_0 \exp(-is_1\theta(0))e_3$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\rho_0 [\cos\theta(0)e_3 + e_2 \sin\theta(0)]$$

d'où $I = -I_3 \cdot e_3 = 1/2\rho_0 \cos\theta(0)$ ce qui est bien l'isomorphisme du nucléon puisque celui d'un proton est $1/2$ et celui d'un neutron $-1/2$.

Divergences.

Pour les calculer nous utilisons la méthode de la base fixée en prenant toujours

$$Q(0) = 1$$

$\Phi(x)$ étant mise sous la forme canonique

$$\Phi(x) = (\rho \exp i\beta)^{1/2} Q \tag{25.9}$$

ce qui est toujours possible d'une seule façon.

Nous rappelons quelques résultats (II). On développe la rotation de Lorentz sous la forme

$$Q = Re + B + M$$

Re étant la partie réelle, B la partie vectorielle, M la partie pseudo-scalaire.

1° Dans le cas particulier $Q = 1 + B$ ou $Q = -(1 + B)$, $\partial_\mu Q = \partial_\mu B$ ou $-\partial_\mu B$ et donc $\partial_\mu Q$ est un bivecteur.

2° Dans le cas général, $Q = (\text{ch } u + b \text{ sh } u)(\cos v + ib \sin v)$, u et v sont deux angles est b un bivecteur de carré 1. De $Q_0 = 1$ on déduit $\text{ch } u = \cos v = 1$ et $\text{sh } u = \sin v = 0$, soit $u = v = 0$. De plus $(\partial_\mu R e)_0 = (\partial_\mu M)_0 = 0$, d'où $(\partial_\mu Q)_0$ est un bivecteur puisque $(\partial_\mu Q)_0 = (\partial_\mu B)_0$.

Ceci étant, nous calculons $[\square\Phi(x)]_0$ de deux façons et nous posons $i_\mu = Q e_\mu \tilde{Q}$.

3° Premièrement à l'aide de (25.9), d'où

$$[\square\Phi(x)]_0 = (\square\rho \exp i\beta)_0^{1/2} + (\rho \exp -i\beta)_0^{1/2}(\square Q)_0$$

4° Deuxièmement à l'aide de (25.2)

$$\begin{aligned} [\square\Phi(x)]_0 &= m\Phi(0)e_0e_2e_1 + \\ &eA_0\Phi(0)\left(\exp is_1 \frac{\theta(0)}{2}\right) \cos \frac{\theta(0)}{2} e_2e_1 + g\Phi(0)P_\mu e_\mu i \end{aligned}$$

5° On obtient ainsi une égalité que l'on multiplie à droite par $(\rho \exp -i\beta)_0^{1/2}$ et en tenant compte du fait que $(\square Q)_0$ est impair, on écrit en ne conservant que la partie vectorielle puisque $(\partial_\mu Q)_0$ est un bivecteur

$$2(\square \cdot Q)_0 = -2m \sin \beta(0)e_3 - (\square\rho)_0\rho_0^{-1} + 2(dm) \sin \beta_0$$

$$\left[\frac{1}{2} \sin \theta(0)e_2 - \sin^2 \theta(0)e_3\right] + 2e[A_0\rho_0 \exp is_1 \frac{\theta(0)}{2} \cos \frac{\theta(0)}{2} e_2e_1]_V$$

la lettre V indiquant que l'on ne conserve que la partie vectorielle. Calculons cette dernière avec

$$A_0 = A_0^0 e_0 + A_0^1 e_1 + A_0^2 e_2 + A_0^3 e_3$$

On obtient

$$\square_V = \cos^2 \frac{\theta(0)}{2} (A_0^1 e_2 - A_0^2 e_1) + \frac{1}{2} \sin \theta(0) (A_0^3 e_1 - A_0^1 e_3)$$

6° Calculons maintenant la divergence à partir de

$$i_3(0) = (Qe_3\tilde{Q})_0 = e_3$$

Soit

$$(\partial_\mu i_3)_0 = (\partial_\mu Q)_0 e_3 - e_3 (\partial_\mu Q)_0$$

et

$$(\square i_3)_0 = (e^\mu \partial_\mu i_3)_0 = (\square Q)_0 e_3 - e^\mu e_3 (\partial_\mu Q)_0 =$$

$$(\square Q)_0 e_3 + e_3 (\square Q)_0 + 2(\partial_3 \tilde{Q})_0$$

et enfin puisque $(\partial_3 \tilde{Q})_0$ est un bivecteur

$$(\square \cdot i_3)_0 = 2(\square \cdot Q)_0 e_3$$

de la même façon $(\square i_0)_0 = 2(\square \cdot Q)_0 e_0$

7° En définitive et compte-tenu du 5° et de $I_3 = \rho i_3$

$$(\square \cdot I_3)_0 = (\square \rho)_0 \cdot e_3 + \rho_0 (\square \cdot i_3)_0 =$$

$$e_3 \cdot \left[-2\rho_0 m \sin \beta_0 e_3 - 2\rho_0 \sin \beta_0 (dm) \sin^2 \frac{\theta(0)}{2} e_3 \right]$$

$$-2\rho_0 e \sin \frac{\theta(0)}{2} \cos \frac{\theta(0)}{2} A_0^1 e_3 \cdot e_3$$

d'où en définitive

$$(\square \cdot I_3)_0 = 2\rho_0 \sin \beta_0 \left(m + dm \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) + e\rho_0 \sin \theta_0 A_0^1$$

En l'absence de champ extérieur ($A_0^1 = 0$) la formule précédente est tout à fait analogue à celle d'Uhlenbeck et Laporte puisque $m + (dm) \sin^2 \frac{\theta(0)}{2}$ représente la masse du nucléon.

De même on calcule $(\square \cdot I_0)_0$ qui se trouve égal à zéro comme il se doit pour qu'il y ait conservation du flux.

Charge

C'est la charge du proton et, si 1 est la charge d'un proton,

$$q = \rho_0 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} = \frac{\rho_0(1 + \cos \theta(0))}{2} = \frac{N}{2} + I,$$

formule de Gell-Mann ainsi démontrée dans ce cas particulier, N étant le nombre baryonique égal ici à 1 lorsque l'on observe effectivement un nucléon c'est-à-dire pour $\rho(0) = 1$.

Moments Magnétiques.

Il ne peut être question de former ici $\Phi(0)e_1e_2\tilde{\Phi}(0)$ car les moments du proton et du neutron ont des valeurs numériques distincts.

DOUBLET Ξ .

I. C'est le doublet (Ξ^0, Ξ^-). On désigne par m' la masse de Ξ^0 et on pose $m' + dm' = m_1$ pour celle de Ξ^- . Il s'ensuit que dm' est positif.

Soit $\Phi_+(-m_1)$ la fonction d'onde à énergie non potentielle négative, de masse négative $-m_1$ et de charge positive e , qui se développe dans la base des γ_μ selon

$$\phi_+(-m_1) = (r \exp i\beta)^{1/2} T(x) \quad \text{avec} \quad T(x)\tilde{T}(x) = 1$$

D'où

$$\square\phi_+(-m_1) = -m_1\phi_+\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + eA\phi_+\gamma_2\gamma_1 \quad (25.10)$$

Posons

$$\phi_+(-m_1) = \phi_-(m_1)\gamma_1\gamma_0i$$

où $\phi_-(m_1)$ est la fonction d'onde cherchée de Ξ^- . Elle vérifie alors selon (25.10)

$$\square\phi_-(m_1)\gamma_1\gamma_0i = -m_1\phi_-(m_1)\gamma_1\gamma_0i\gamma_0\gamma_2\gamma_1 + eA\phi_-(m_1)\gamma_1\gamma_0i\gamma_2\gamma_1$$

soit

$$\square\phi_-(m_1)\gamma_1\gamma_0 = m_1\phi_-(m_1)\gamma_2 + eA\phi_-(m_1)\gamma_2\gamma_0$$

c'est-à-dire

$$\square\phi_-(m_1) = m_1\phi_-(m_1)\gamma_0\gamma_2\gamma_1 - eA\phi_-(m_1)\gamma_2\gamma_1 \quad (25.11)$$

ce qui est bien l'équation de Ξ^- dans le champ A .

II. Posons $e_\mu = T(0)\gamma_\mu\tilde{T}(0)$, $r = \rho_0 \sin^2 \theta(0)/2$, ρ_0 étant la probabilité propre du doublet. D'où

$$[\square\phi_-(x)]_0\tilde{T}(0) = m_1\phi_-(0)\tilde{T}_0e_0e_2e_1 - eA\phi_-(0)\tilde{T}(0)e_2e_1 \quad (25.12)$$

$$\text{soit } \phi_-(0)\tilde{T}(0) = (-\rho \exp i\beta)_0^{1/2} \sin \frac{\theta(0)}{2} i s_1$$

III. Comme précédemment la fonction d'onde $\phi_0(x)$ de Ξ^0 vérifie dans le base des e_μ

$$\square\phi_0(x) = m'\phi_0(x)e_0e_2e_1 \quad (25.13)$$

avec

$$\phi_0(x) = (\rho \exp i\beta)_0^{1/2} \cos \frac{\theta(0)}{2} c(x) \text{ et } C(0) = 1$$

IV. Nous posons pour la fonction d'onde $\Phi(x)$ du doublet Ξ

$$\Phi(x) = \phi_-(x)\tilde{T}(0) + \phi_0(x) \quad (25.14)$$

si bien que

$$\Phi(0) = \phi_-(0)\tilde{T}(0) + \phi_0(0) = (\rho \exp i\beta)_0^{1/2} (\exp -i s_1 \frac{\theta_0}{2})$$

En additionnant (25.12) et (25.13) et en tenant compte de (25.14) et en remplaçant $(\rho \exp i\beta)_0^{1/2}$ par $\Phi(0)(\exp i s_1 \theta(0)/2)$, on obtient

$$[\square\Phi(x)]_0 = m'\Phi(0)e_0e_2e_1 + eA\Phi(0)(\exp i s_1 \frac{\theta(0)}{2}) i e_0e_2 \sin \frac{\theta_0}{2}$$

$$+ g\Phi(0)P^\mu e_\mu i$$

car on vérifie

$$P^0 = P^1 = 0, P^2 = \frac{(dm')}{2g} \sin \theta(0), P^3 = \frac{(dm')}{g} \sin^2 \frac{\theta(0)}{2}$$

avec

$$g\Phi(0)P^\mu e_\mu i = \phi_-(0)\tilde{T}(0)e_0e_2e_1(dm') \quad (25.15)$$

Probabilités.

Celle de Ξ^- est $\rho_0 \sin^2 \theta(0)/2$ celle de Ξ^0 est $\rho_0 \cos^2 \theta(0)/2$.

Pour la base propre du doublet la vitesse d'univers et l'isospin les résultats précédents sont sans changement:

pour $\rho(0) = 1$, $I = 1/2 \cos \theta(0)$. Pour $\theta(0) = 0$, on a $I(\Xi^0) = 1/2$. Pour $\theta(0) = \pi$, on a $I(\Xi^-) = -1/2$

Charge.

$$q' = -\sin^2 \frac{\theta(0)}{2} = -\frac{(1 - \cos \theta_0)}{2} = I - \frac{1}{2}$$

Pour retrouver Gell-Mann on introduit l'étrangeté $S = -2$ d'où $q' = 1 + (S + N)/2$ puisque $N = 1$.

Conclusion.

- 1° Le doublet Ξ et le nucléon sont conjugués c'est-à-dire qu'ils se correspondent dans une application qui conserve l'isospin (II bis). Mais on outre cette application conserve aussi le spin et c'est la seule conjugaison entre doublets hadroniques qui conserve le spin et l'isospin. C'est ce qui permet selon nous, la réussite de la transformation (25.14) relative à la fonction d'onde.
- 2° On n'observe que des corpuscules (Louis de Broglie) ce qui ne signifie nullement que le corpuscule existe si on ne l'observe pas. L'interprétation est essentiellement probabiliste conformément à l'expérience et la contradiction onde-corpuscule dans le cas d'un corpuscule isolé reste irréductible. Il suffit donc de savoir ce qui se passe en un point déterminé d'ailleurs quelconque. C'est qui fait l'intérêt des solutions locales ici utilisées.
- 3° Non seulement l'algèbre de Clifford permet d'écrire une équation de l'électron plus élégante que celle de Dirac, plus géométrique aussi, mais elle permet d'aller plus loin en écrivant une équation relativiste du nucléon.

Remerciements

Avec mes Remerciements a Mme. Aragón

References

- [1] Lounesto P., Counter-Examples in Clifford Algebras, *Advances in Applied Clifford Algebras* **6** (1) (1996), 71.
- [2] Casanova G., Sur les Logarithmes dans les Algèbres de Clifford de $R(n,0)$, *Advances in Applied Clifford Algebras* **7** (1) (1997), 35.
- [3] G. Casanova, *L'Inversion et l'Algèbre de Clifford*, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **4** (1), June 1994.
- [4] G. Casanova, L'inversion et l'algèbre de Clifford, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **4**(1), (1994), 27-34.
- [5] Girard P., *The quaternion group and modern physics*, 1984. The Institute of Physics and European Physical Society.
- [6] Hestenes D., "Spacetime Algebra", New York, Gordon and Breach, (1966).